



Munich Personal RePEc Archive

# Arbitrage tests and surface of implied volatility: An empirical analysis of high frequency data

David Ardia

University of Neuchatel

June 2002

Online at <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17415/>

MPRA Paper No. 17415, posted 22. September 2009 07:33 UTC

# Tests d'arbitrage et surfaces de volatilité : analyse empirique sur données haute fréquence

---

Travail de diplôme

Auteur : David Ardia  
Rapporteur : Olivier Besson  
Co/rapporteur : Akimou Ossé

Université de Neuchâtel  
juin 2002

# Préface

Ce mémoire propose l'analyse de données haute fréquence sur les options DAX durant le mois d'octobre 2001. Il se compose de trois chapitres traitant respectivement l'activité de cotations, les tests d'arbitrage et la performance de différents modèles de surfaces de volatilité.

Le chapitre 1 propose dans un premier temps une présentation des données ainsi qu'une illustration de l'activité des cotations des options sur l'indice DAX. En déterminant un proxy d'activité en terme de nombre de cotations, il va mettre en évidence une activité marquée en début de journée et à l'ouverture du marché américain. Une analyse plus fine montre que les opérateurs traitent principalement les options proches de la monnaie dont l'échéance est de court et moyen terme.

Le chapitre 2 analyse ensuite la présence d'opportunités d'arbitrage sur le marché. Il tente de déterminer si les prix cotés sur le marché permettent ou non de dégager un profit certain sans mise de fonds initiale et sans aucun risque. Les deux tests d'arbitrage proposés, à savoir le test de la borne inférieure de prix et le test de la relation de parité put-call, vont mettre en évidence de très faibles taux de violations. De plus, les gains d'arbitrage sont extrêmement faibles. Ils ne constituent pas de gains substantiels en raison des coûts structurels non négligeables.

Le chapitre 3 propose enfin l'étude de la performance de quatre modèles paramétriques de surfaces de volatilité. Sur une plage temps de 30 minutes, les différentes surfaces sont calibrées aux volatilités implicites observées sur le marché. La qualité explicative et prévisionnelle est alors testée. Une étude de l'évolution des coefficients est également proposée. Les résultats mettent clairement en évidence la violation de l'hypothèse de volatilité constante. Les surfaces considérant un smile et une structure par terme de volatilité donnent les meilleurs résultats de calibration et de prévision.

Cette étude a été réalisée en collaboration avec la Banque Cantonale Vaudoise dans le cadre de mon travail de diplôme. Je tiens à remercier Messieurs Akimou Ossé et Nils Tuchschnid de la Banque Cantonale Vaudoise ainsi que Monsieur Olivier Besson de l'Université de Neuchâtel pour m'avoir donné la possibilité de réaliser cette étude. J'ai profité pleinement de leurs conseils, de leurs remarques, ainsi que de leurs encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire. Un grand merci au groupe des traders options de la Banque Cantonale Vaudoise, particulière-

ment à Messieurs Olivier Guillot, Sebastien Bonnardel et Alain Comté qui m'ont reçu durant une semaine au sein de leur équipe. Ils m'ont fourni les différentes données et ont répondu à bon nombre de mes questions. Je tiens à remercier également Monsieur Guido Bolliger du groupe Finance de l'Université de Neuchâtel qui a relu attentivement mon manuscrit et qui a toujours pris le temps de répondre à mes nombreuses questions.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Données</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Le marché allemand . . . . .	1
1.3	Echantillon . . . . .	2
1.4	Taux d'intérêt . . . . .	3
1.5	Activité du marché . . . . .	4
1.6	Sélection et ajustement du sous-jacent . . . . .	5
1.7	Conclusion . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Tests d'arbitrage</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Bornes inférieures de prix d'options . . . . .	11
2.3	Relation de parité put-call . . . . .	13
2.4	Résultats empiriques . . . . .	14
2.4.1	Analyse globale . . . . .	15
2.4.2	Analyse échéance-moneyness . . . . .	15
2.5	Robustesse . . . . .	18
2.6	Conclusion . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Surfaces de volatilité</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Modèle de Black . . . . .	24
3.3	Volatilité implicite . . . . .	25
3.3.1	Algorithme de Newton-Raphson . . . . .	25
3.3.2	Sélection de volatilités . . . . .	26
3.4	Constitution de l'échantillon . . . . .	28
3.5	Modèles de surfaces . . . . .	30
3.6	Résultats des estimations . . . . .	32
3.6.1	Qualité du fitting . . . . .	32
3.6.2	Résultats in-the-sample . . . . .	33
3.6.3	Evolution des paramètres . . . . .	34
3.6.4	Résultats out-of-the-sample . . . . .	37

3.7 Conclusion . . . . .	38
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>
<b>A Bornes supérieures de prix d'options</b>	<b>I</b>

# Notations

- $F_t^b := F_t^b(\tau_2)$ , le prix *bid* en  $t$  d'un future d'échéance  $\tau_2$ .
- $F_t^a := F_t^a(\tau_2)$ , le prix *ask* en  $t$  d'un future d'échéance  $\tau_2$ .
- $F_t^m := F_t^m(\tau_2)$ , le prix *midpoint* (milieu de fourchette de prix) en  $t$  d'un future d'échéance  $\tau_2$ .
- $c_t^b := c_t^b(\tau, K)$ , le prix *bid* en  $t$  d'une option call d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $c_t^a := c_t^a(\tau, K)$ , le prix *ask* en  $t$  d'une option call d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $c_t^m := c_t^m(\tau, K)$ , le prix *midpoint* en  $t$  d'une option call d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $p_t^b := p_t^b(\tau, K)$ , le prix *bid* en  $t$  d'une option put d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $p_t^a := p_t^a(\tau, K)$ , le prix *ask* en  $t$  d'une option put d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $p_t^m := p_t^m(\tau, K)$ , le prix *midpoint* en  $t$  d'une option put d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ .
- $c_t := c_t(\tau, K)$ , le prix théorique d'une option call selon le modèle de Black.
- $p_t := p_t(\tau, K)$ , le prix théorique d'une option put selon le modèle de Black.
- $r_t := r_t(\tau)$ , le taux d'intérêt en  $t$  valable sur une période  $\tau$ .
- $t$ , la date actuelle.
- $\tau := (\frac{T-t}{365})$ , l'échéance calendaire d'une option de maturité  $T$ .
- $\tau_2 := (\frac{T_2-t}{365})$ , l'échéance calendaire d'un future de maturité  $T_2$  ( $T_2 \geq T$ ).
- $\sigma_t^{bk} := \sigma_t^{bk}(\tau, K)$ , la volatilité implicite en  $t$  dérivée du prix d'une option d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$  par inversion du modèle de Black.
- $m := m_t := \frac{K}{F_t}$ , le *moneyness* d'une option de strike  $K$  sur le sous-jacent  $F_t$ .

# Chapitre 1

## Données

### 1.1 Introduction

Ce chapitre propose une première approche des options et futures DAX qui constituent la base des études consacrées aux tests d'arbitrage et aux surfaces de volatilité présentés dans les chapitres 2 et 3. En définissant l'activité du marché par le nombre de cotations observées, il est alors possible de décrire les caractéristiques de liquidité des options DAX, information utile pour les praticiens.

La section 1.2 propose un bref rappel des caractéristiques des futures et des options sur l'indice DAX cotés sur le marché Eurex<sup>©</sup>. Les informations relatives à l'ensemble des données considérées durant la période d'observation et les taux d'intérêt utilisés pour les différentes évaluations sont présentés aux sections 1.3 et 1.4. La section 1.5 illustre l'intensité des transactions relativement à l'heure de cotation. Une analyse d'activité est également appliquée au strike et à l'échéance de l'option. Enfin, la section 1.6 présente la méthodologie de sélection du sous-jacent. Celle-ci vise à tenir compte au maximum de la synchronisation des données et par conséquent de l'arrivée de nouvelles informations. Elle introduit également la notion de valeur intrinsèque et définit le concept de *moneyness*.

### 1.2 Le marché allemand

L'indice du marché allemand DAX, ou Deutscher Aktienindex, est un indice composé des 30 plus grosses capitalisations boursières allemandes. Tout comme l'indice suisse SMI, le DAX est un indice pondéré par les capitalisations boursières des titres le composant. Les dividendes versés par les sociétés sont réinvestis dans l'indice : il s'agit d'un *total return index*. Le trading est réalisé en temps réel par le système électronique *Xetra*<sup>©</sup> de la bourse de Frankfurt.



Les futures FDAX cotés sur le marché Eurex<sup>©</sup> portent sur le sous-jacent DAX. La valeur du contrat est de 25 euros par point d'indice. La cotation se fait en points d'indice, à la décimale près. Le mouvement minimal de prix est de 0.5 point d'indice, ce qui représente donc une valeur de 12.50 euros. Le spectre d'échéances comprend les trois mois les plus proches contenus dans le cycle des mois de mars/juin/septembre/décembre.<sup>1</sup> L'échéance a lieu le 3<sup>ème</sup> vendredi du mois, s'il s'agit d'un jour de trading. Dans le cas contraire, le jour d'expiration est le jour de trading précédent immédiatement le vendredi. Le prix à l'échéance est déterminé par la moyenne des valeurs prises par l'indice DAX entre 13h21 et 13h30. Le *cash settlement* est basé sur le prix à l'échéance et est versé le jour de trading suivant immédiatement le dernier jour de cotation du future. Les heures de cotations débutent à 9h et se terminent à 17h30 CET. Il n'existe pas de limites de position sur les futures FDAX. Les marges sont constituées d'une marge initiale couvrant une variation donnée du sous-jacent ainsi que d'appels/restitutions de marges quotidiens déterminés par la chambre de compensation de l'Eurex<sup>©</sup>.

Les options ODAX cotées sur le marché Eurex<sup>©</sup> portent également sur l'indice DAX. La valeur de contrat d'option est de 5 euros par point d'indice. La cotation des options se fait en points d'indice, à la décimale près. Le mouvement minimal de prix est de 0.1 point, représentant donc une valeur de 0.50 euros. Les options sont de type européen, c'est-à-dire qu'une option ne peut être exercée qu'à l'échéance. Les mois d'expirations sont les trois mois calendaires les plus proches, les trois mois suivants contenus dans le cycle C ainsi que les deux mois suivants du cycle juin et décembre. Les maturités s'étendent donc sur 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 et 24 mois. Le jour d'échéance est le 3<sup>ème</sup> vendredi du mois. Les prix d'exercices sont au nombre de 9 pour les maturités inférieures à 6 mois, de 5 pour les maturités comprises entre 7 et 12 mois et de 5 pour les échéances comprises entre 13 et 24 mois. Ainsi, pour chaque mois d'expiration, au moins 5 prix d'exercices sont définis. La graduation des prix d'exercice est de 25, 50, 100 et 200 points d'indice selon les échéances. La valeur de l'indice à l'échéance est définie par la moyenne des valeurs prises par l'indice entre 13h21 et 13h30. Le *cash settlement* se fait le jour ouvrable suivant immédiatement le dernier jour de trading de l'option. Les cotations débutent à 9h et se terminent à 17h30. Tout comme pour les futures FDAX, il n'existe pas de limites de position sur les options ODAX. Les marges sont déterminées quotidiennement par la chambre de compensation de l'Eurex<sup>©</sup> sur la base des paramètres déterminés par la méthode *risk-based margining*.

### 1.3 Echantillon

La période d'observation s'étend du lundi 1<sup>er</sup> octobre au vendredi 26 octobre 2001 ; soit 26 jours dont 20 ouvrables. L'échantillon de données est composé de l'ensemble des prix *bid* et *ask* des options et des futures sur l'indice DAX cotés sur Eurex<sup>©</sup> durant cette période (Tab. 1.1). La plage d'observation journalière débute à 10h pour finir à 12h et reprend de 14h à 17h CET. La fréquence des cotations est de l'ordre de la seconde. Les options considérées sont de maturités octobre, novembre, décembre 2001, mars, juin, septembre et décembre 2002, ainsi que juin 2003.

---

<sup>1</sup>Il s'agit du cycle C.

L'échéance maximale est de 663 jours ; soit la durée séparant le premier jour d'observation à l'échéance des options juin 2003. Les strikes cotés sont compris entre 2000 et 9600 points d'indice.<sup>2</sup> Les futures sont de maturités décembre 2001, mars et juin 2002.

	Options DAX	Futures DAX
cotations totales	737'974	368'454
cotations calls	415'492	—
cotations puts	322'482	—

TAB. 1.1 – Nombre de cotations enregistrées sur la période d'observation

Le tableau 1.1 présente l'échantillon des prix (bid+ask) de toutes les options et de tous les futures cotés sur le marché Eurex<sup>©</sup> durant la période d'observation, soit entre le lundi 1<sup>er</sup> octobre et le vendredi 26 octobre 2001.

## 1.4 Taux d'intérêt

Les taux d'intérêt utilisés pour les différentes évaluations se basent sur des taux *Libor*<sup>3</sup> sur l'Euro extraits de DataStream<sup>©</sup>. Le spectre d'échéances considéré s'étend de 1 à 12 mois. Ces taux sont par convention des taux simples (*actual/360*).

Dans un premier temps, ces taux sont transformés en taux simples (*actual/365*). Sur la base de ces nouveaux taux, une simple structure par terme est créée par interpolation. Celle-ci s'étend donc de 1 à 12 mois. Les taux d'échéances inférieures à un mois sont également déterminés par interpolation, cette fois entre 0 et le taux Libor 1 mois. Pour les échéances supérieures ou égales à 12 mois, le taux 12 mois est sélectionné. Formellement, le taux  $\hat{r}_t(\tau)$  déterminé par interpolation est donné par

$$\hat{r}_t(\tau) = \begin{cases} R_{t,\underline{\tau}} + \left( \frac{R_{t,\bar{\tau}} - R_{t,\underline{\tau}}}{\bar{\tau} - \underline{\tau}} \right) (\tau - \underline{\tau}) & \text{si } \tau < 1 \\ R_{t,1} & \text{si } \tau \geq 1 \end{cases}$$

où  $R_{t,\underline{\tau}}$  et  $R_{t,\bar{\tau}}$  sont les taux Libor en  $t$  correspondant aux échéances standards  $\underline{\tau}$  et  $\bar{\tau}$  englobant l'échéance cible  $\tau$  ( $\underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$ ). Dans un deuxième temps, le taux  $\hat{r}_t$  est transformé en un taux instantané annuel,  $r_t(\tau)$ , donné par

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln(1 + \hat{r}_t(\tau)\tau)$$

Le taux  $r_t$  sera utilisé par la suite pour les différentes évaluations.

<sup>2</sup>L'indice DAX a valu jusqu'à 8000 points en 2000. Les options long terme (2 ans) émises à l'époque expliquent donc les strikes à 9600 points. Au mois de septembre 2001, l'indice DAX est descendu à moins de 4000 points.

<sup>3</sup>London Interbank Offered Rate.

## 1.5 Activité du marché

L'activité de trading est définie par le nombre de cotations observées. Il s'agit d'un proxy ; les données sur les volumes exacts de transactions n'étant pas disponibles. Une autre méthode pour déterminer précisément l'activité du marché consiste à observer les écarts entre prix bid et ask ; les petites fourchettes de prix indiquant une activité plus intense. Cette méthodologie sera reprise dans une prochaine étude.

Une première analyse horaire va permettre de définir les moments de forte liquidité d'une journée de trading, indiquant ainsi aux opérateurs les moments propices à la calibration de leurs modèles d'évaluation. Dans un deuxième temps, l'analyse de l'intensité d'activité en fonction des caractéristiques de l'option permettra de déterminer quelles sont les options à même de contenir le maximum d'informations relatives aux anticipations des investisseurs.

### Cotations horaires

La figure 1.1 décrit le nombre de cotations sur des intervalles de 5 minutes durant une journée de trading. Elle met en évidence une activité plus importante en début matinée et en fin de journée. Entre 12h et 14h, on remarque une nette diminution des cotations. Celles-ci reprennent à 14h30 par une première vague d'augmentation qui diminue déjà à 15h. A 15h30, l'ouverture du marché américain génère une nette progression du nombre de cotations. Celles-ci se stabilisent jusqu'à 16h55. Les 5 dernières minutes de la plage d'observation font apparaître une nette diminution des cotations. Il semble que malgré la fermeture officielle des cotations à 17h30, le marché continue à suivre les anciennes heures de fermeture à 17h.



FIG. 1.1 – Evolution horaire du nombre de cotations

La figure 1.1 présente le nombre total de cotations observées sur des intervalles de 5 minutes, pour l'ensemble des options sur indice DAX et ceci sur la totalité de la période d'observation.

## Strike et échéance

L'analyse d'activité par rapport aux caractéristiques de l'option met en évidence une activité de cotations élevée pour les options de faibles et moyennes échéances (échéance inférieure à 180 jours). Les strikes les plus liquides sont ceux dont la valeur est proche du prix de l'indice sous-jacent, c'est à dire proche de la monnaie. La notion de proximité entre strike et prix du sous-jacent ainsi que l'étude d'activité relativement aux caractéristiques des options sont reprises de manière détaillée à la section 1.6.

## 1.6 Sélection et ajustement du sous-jacent

Les prix qui composent l'échantillon brut de données sont des cotations d'options sur indice. Or la méthodologie d'évaluation des options retenue se base sur le modèle de Black [9], en l'occurrence l'évaluation d'options sur futures. Les futures et les options sur l'indice DAX étant cotés sur le même marché, en temps quasi continu, les nouvelles informations sont intégrées instantanément dans les prix des futures et des options. Toutefois, le fait de considérer les futures comme sous-jacents plutôt que l'indice lui-même pose un problème de sur- ou sous-évaluation si les échéances des options et des futures ne coïncident pas. Ce biais d'évaluation n'est pas négligeable.

Une option sur future d'indice a théoriquement le même prix qu'une option sur indice lorsque les maturités du future et de l'option sont les mêmes. La comparaison est donc consistante pour les maturités existantes à la fois pour les futures et les options. Cependant, pour une date donnée, le nombre de maturités disponibles pour les options est de 8 alors qu'il n'est que de 3 pour les futures. Sur la période d'observation, les différences d'échéances apparaissent pour les mois d'octobre et novembre 2001, septembre et décembre 2002 et juin 2003. Pour parvenir à une évaluation correcte, un future ajusté a donc été défini. En considérant une maturité  $T$  d'une option, le future d'échéance la plus proche possible (égale ou supérieure) et coté précédemment sur le marché est sélectionné. Un prix de future ajusté est ensuite défini en actualisant le future sélectionné au taux forward sur la période différentielle (échéance du future et échéance de l'option). Dans le cas d'un prix ask, ce future ajusté,  $F_t^a(\tau)$ , est donné par

$$F_t^a(\tau) := e^{(r_t(\tau)\tau - r_t(\tau_2)\tau_2)} F_t^a(\tau_2)$$

ou  $r_t(\tau)$  et  $r_t(\tau_2)$  sont les taux spots en  $t$  valables pour une durée  $\tau$ , respectivement  $\tau_2$ . Par la suite, le prix de l'option sera évalué sur la base du prix du future ajusté et pourra ainsi être comparé aux prix du marché sans biais de sous- ou sur-évaluation. Dans le cas où les maturités d'options existent également pour les futures, le facteur d'actualisation vaut 1 et n'a aucun impact sur le prix du marché ; c'est notamment le cas pour les échéances décembre 2001, mars et juin 2002.

On remarque que cette méthodologie de sélection possède un désavantage. Elle élimine de l'échantillon toutes les options dont l'échéance est lointaine car il n'existe alors pas de futures d'échéance

supérieure pouvant être sélectionnés. L'échantillon ainsi constitué ne possède plus d'option long terme. L'échéance maximale est à présent de 263 jours. Elle correspond à la différence entre le premier jour d'observation et la maturité des futures de maturité juin 2002.<sup>4</sup>

## Moneyneess et échéance

Le future sous-jacent sélectionné selon la méthodologie 1.6 permet désormais de considérer la notion de *moneyneess*. Ce concept est introduit pour quantifier l'écart entre le prix du sous-jacent et le strike (valeur intrinsèque). Soit une option de strike  $K$  sur le sous-jacent  $F_t$ , le moneyneess en  $t$  est défini par

$$m_t(K, F_t) := \frac{K}{F_t^m}$$

Le fait de considérer le moneyneess  $m_t$  plutôt que le strike  $K$  permet de se placer dans un repère qui évolue avec le prix du sous-jacent. Pour  $m_t = 1$ , les options sont dites à la monnaie ou *at-the-money* (ATM). Les options calls sont dites en dehors de la monnaie ou *out-of-the-money* (OTM) lorsque  $m_t > 1$  (dans ce cas, les options puts sont dites dans la monnaie ou *in-the-money* (ITM)). Pour  $m_t < 1$  les options calls sont ITM et les options puts OTM.

La figure 1.6 a) présente l'activité de cotations relativement à l'échéance et au moneyneess des options. Elle met en évidence les différentes bandes d'activité de cotations correspondantes aux différentes échéances des options. Le premier bloc de gauche correspond aux échéances entre 1 et 3 mois. Les deux bandes suivantes correspondent aux échéances mars et juin 2002. L'activité de trading est importante pour les options proches de la monnaie ( $0.8 \leq m_t \leq 1.2$ ) d'échéance inférieure à 180 jours. Les figures 1.6 b) et 1.6 c) montrent clairement que les options calls et puts liquides sont des options proches de la monnaie et en dehors de la monnaie. Ces options ATM et OTM sont fortement échangées car leur valeur intrinsèque est faible relativement à leur valeur spéculative. Malgré cette activité centrée, on remarque un nombre non négligeable de cotations pour les calls ITM d'échéance 60 jours. L'activité sur les options puts ITM est également marquée pour des échéances comprises entre 50 et 100 jours.

---

<sup>4</sup>Entre le 01.10.2001 et le 21.06.2002.

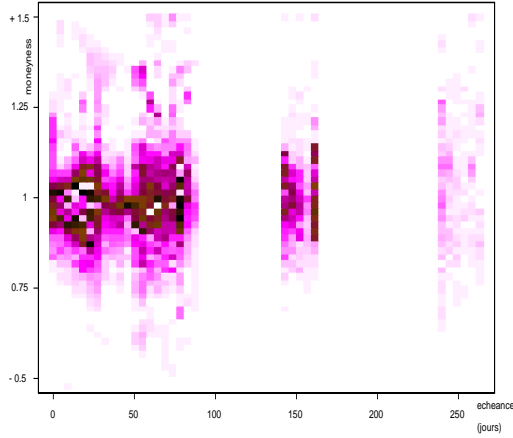


Fig. 1.6 a) Total des cotations

La figure 1.6 a) présente les niveaux de cotations pour les options DAX sur l'ensemble de l'échantillon, en fonction de leur échéance et de leur moneyness  $m_t = K/F_t$ . La figure b) (respectivement c)) présente les résultats pour les options calls (respectivement puts). Les graphiques sont obtenus par interpolation bivariée sur les mesures effectuées. Les zones les plus foncées indiquent les niveaux d'activité les plus élevés.

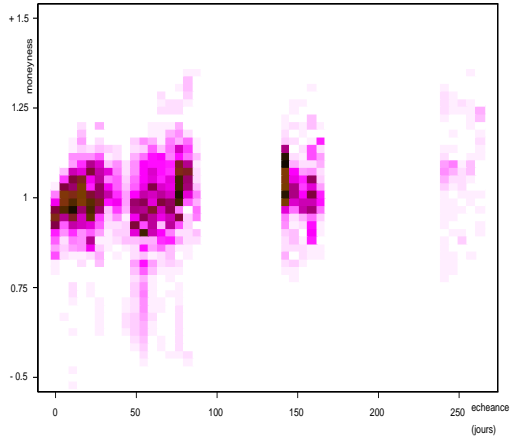


Fig. 1.6 b) Cotations calls

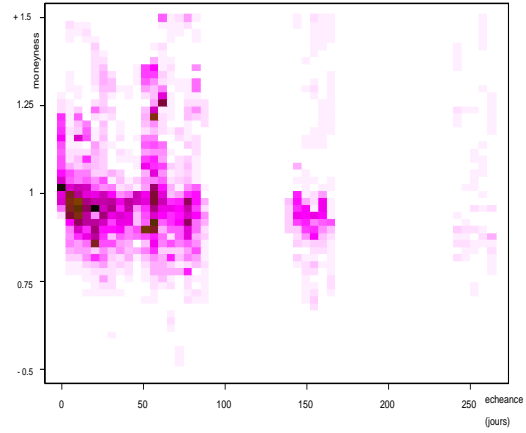


Fig. 1.6 c) Cotations puts

## 1.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté les données utilisées dans le cadre de l'étude des tests d'arbitrage et des surfaces de volatilités des chapitres 2 et 3. La méthode de sélection du sous-jacent, en l'occurrence le future ajusté, vise à tenir compte au maximum de la synchronisation des données, évitant les biais de non-simultanéité entre options et indice. Ce chapitre a également permis de mettre en évidence une activité de cotation importante en début de matinée et à l'ouverture du marché

américain. Une analyse échéance-moneyness a montré que les options les plus liquides sont en dehors et proches de la monnaie avec des maturités de moins de 180 jours.

## Chapitre 2

# Tests d'arbitrage

### 2.1 Introduction

Plusieurs études empiriques ont testé la présence d'opportunités d'arbitrage sur les marchés d'options. Certains de ces tests se sont basés sur des modèles théoriques comme ceux de Black et Scholes [11], Black [9] ou encore Cox-Ross-Rubinstein [18]. D'autres, sans faire appel à des modèles d'évaluation, ont simplement testé les relations entre les prix du marché. Ils ont cherché à déterminer si la prise d'une position permet de dégager un profit certain, sans risque et sans mise de fond initiale. La relation de parité put-call et la relation de *box spread*<sup>1</sup> sont des relations entre prix d'options découlant de telles considérations.

Les tests entrepris par Evnine et Rudd [25] sur des données intra-journalières de 1984 mettent en évidence de nombreuses violations sur les bornes de prix et sur la relation de parité pour les options sur les indices S&P100 et *Major Market Index*.<sup>2</sup> Chance [15] teste la relation de parité ainsi que la relation de box spread pour les options sur l'indice S&P100 pour le premier trimestre 1984. Les résultats montrent un taux de violations de 30% pour la relation de parité et de 5% pour la relation de box spread. Cet écart de pourcentage est expliqué en partie par l'absence de biais d'asynchronisme entre options et indice; la relation de box spread ne nécessitant pas de position sur l'indice. Les études de Loudon [35] et Taylor [42] testent la relation de parité put-call sur le marché australien. Taylor traite la période 1982-1989 en se basant sur des prix mensuels. Il met en évidence des taux de violations de l'ordre de 16%. Loudon considère les prix du *Register of Sales Records* pour l'année 1985. Il met en évidence un taux de violations de près de 30%. En 1992, Brown et Easton [13] reprennent les études de Taylor et Loudon pour l'année 1982 en utilisant cette fois des prix de clôture journaliers. Ils confirment les résultats de Loudon en mettant en évidence un taux de violations de l'ordre de 29%. Plus récemment,

---

<sup>1</sup>La relation de box spread est définie comme une combinaison d'un call spread et d'un put spread.

<sup>2</sup>Indice mesurant la performance des 20 plus importantes capitalisations boursières du marché américain.



une étude de Ackert et Tian [2] examine les opportunités d'arbitrage du marché des options sur l'indice S&P500. Celle-ci teste notamment la relation de box spread. Les résultats mettent en évidence un pourcentage de violations d'environ 22%. Sur le marché suisse, Chesney, Gibson et Loubergé [16] testent les bornes inférieures de prix ainsi que la relation de parité pour les options de type européen sur la période 1989-1990. Leurs résultats mettent en évidence la présence de violations, même en utilisant des données intra-journalières. Le taux de violations de la relation de parité put-call est d'environ 18% pour les données journalières et de 32% pour les données intra-journalières. Toutefois, les opportunités sont significativement réduites lorsque les coûts de transactions sont pris en compte. Elle atteignent alors 2.5% et respectivement 12.5%. Les opportunités plus élevées dans le cadre intra-journalier sont expliquées par le manque de liquidité du marché.

Les études empiriques entreprises sur les différents marchés d'options sur indices indiquent que la relation de parité est fréquemment violée et que les options sont souvent mal évaluées relativement aux prix donnés par les modèles théoriques. Toutefois, ces violations n'indiquent pas pour autant une inefficience du marché. Il est en effet possible que les arbitrages ne puissent se faire à des coûts bas. C'est notamment le cas pour des options sur indices où il n'existe pas de futures.<sup>3</sup> Ainsi pour réaliser l'arbitrage, la prise de position sur l'indice nécessite la composition d'un portefeuille de réplique pouvant engendrer de nombreux frais et coûts de transactions. Les différents résultats sont de plus très sensibles à la méthodologie employée. Il semble bien que le problème de synchronisation des données utilisées constitue l'explication majeure de la présence de telles violations; l'utilisation de prix mensuels ou même journaliers ne constituent pas une base solide pour les tests d'arbitrage. D'autres erreurs méthodologiques sont à même d'expliquer ces forts pourcentages de violations. Ackert et Tian expliquent, par exemple, que les tests d'Evnine et Rudd se basent sur des conditions d'arbitrage propres aux options européennes alors qu'ils testent des options américaines. Du fait d'un exercice anticipé, les relations de prix ne sont pas vérifiées pour les options américaines. En 1995, une étude de Kamara et Miller [34] sur les options de l'indice S&P500, de type européen cette fois, met en évidence un nombre moins conséquent de violations.

La suite de ce chapitre présente une étude des opportunités d'arbitrage sur le marché des options sur l'indice DAX. Les tests se basent sur les bornes inférieures de prix d'options et sur la relation de parité put-call. Pour éliminer les biais de synchronisation, la méthodologie considère le future sur indice comme sous-jacent; les cotations *bid-ask* des options et des futures se déroulant sur le même marché en temps quasi continu, l'information est instantanément intégrée dans les deux instruments. Les résultats des différents tests d'arbitrage mettent en évidence de très faibles taux de violations. Les violations des bornes inférieures sont de l'ordre de 0.015%. Pour la relation de parité, ces violations se situent aux environs de 2%. De plus, les gains potentiels d'arbitrage observés sont de l'ordre de 2 points d'indice. Ils ne constituent pas de gains substantiels.

Le chapitre est organisé de la manière suivante : Les sections 2.2 et 2.3 dérivent les conditions de

---

<sup>3</sup>C'est le cas dans l'étude de Chesney, Gibson et Loubergé [16]. Dans la première partie de leur étude aucun future sur le SMI n'existait. En novembre 1990, les futures sur l'indice SMI furent échangés pour la première fois.

non-arbitrage sur les bornes inférieures et sur la relation de parité put-call en tenant compte du *bid-ask spread*. La section 2.4 présente les résultats empiriques. La section 2.5 présente les erreurs d'évaluation potentielles liées à la méthodologie utilisée. La conclusion donnée à la section 2.6 reprend les différents résultats et détermine l'intérêt économique de tels arbitrages.

## 2.2 Bornes inférieures de prix d'options

### Option call

Soit  $c_t$  le prix en  $t$  d'une option call sur future d'indice  $F_t$ , d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ . La borne inférieure théorique du prix du call est donnée par

$$e^{-r\tau}(F_t - K)_+ \leq c_t \quad (2.1)$$

où  $(\cdot)_+ := \max(\cdot, 0)$  le prix d'une option ne pouvant être négatif. La construction d'un portefeuille d'arbitrage adéquat (Tab. 2.1) permet de retranscrire l'expression (2.1) en tenant compte du bid-ask spread. Le *payoff* en  $T$  de ce portefeuille est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_c$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \gamma_c := c_t^a + e^{-r\tau}(K - F_t^b) &\geq 0 \\ \Rightarrow_{\text{non négatif}} e^{-r\tau}(F_t^b - K)_+ &\leq c_t^a \end{aligned} \quad (2.2)$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat call	$c_t^a$	$F_T - K$	0	0
Vente future	0	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau}F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau}K$	$K$	$K$	$K$
Total	$\gamma_c$	0	0	$K - F_T > 0$

TAB. 2.1 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_c$

Le tableau 2.1 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne inférieure de prix d'une option call. Le payoff étant positif ou nul, la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle sous peine d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture à la date  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

L'expression (2.2) définit la borne inférieure du prix d'une option call. Il y a violation de cette borne lorsque

$$\gamma_{c+} := e^{-r\tau}(F_t^b - K)_+ - c_t^a > 0 \quad (2.3)$$

et gain d'arbitrage de  $\gamma_{c+}$  points d'indice.

## Option put

Soit  $p_t$  le prix en  $t$  d'une option put sur future d'indice  $F_t$ , d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$ . La borne inférieure théorique du prix du put est donnée par

$$e^{-r\tau}(K - F_t)_+ \leq p_t \quad (2.4)$$

Là encore, la construction d'un portefeuille d'arbitrage adéquat (Tab. 2.2) permet de retranscrire l'expression (2.4) en tenant compte du bid-ask spread. Le payoff en  $T$  de ce portefeuille est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_p$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit être positive ou nulle. On en déduit

$$\begin{aligned} \gamma_p &:= p_t^a + e^{-r\tau}(F_t^a - K) \geq 0 \\ &\stackrel{\text{non négatif}}{\Rightarrow} e^{-r\tau}(K - F_t^a)_+ \leq p_t^a \end{aligned} \quad (2.5)$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat put	$p_t^a$	0	0	$K - F_T$
Achat future	0	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$
Depôt de cash	$e^{-r\tau} F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} K$	$-K$	$-K$	$-K$
Total	$\gamma_p$	$F_T - K > 0$	0	0

TAB. 2.2 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_p$

Le tableau 2.2 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne inférieure de prix d'une option put. Le payoff étant positif ou nul, la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle sous peine d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture à la date  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

L'expression (2.5) définit la borne inférieure du prix d'une option put. Il y a violation lorsque

$$\gamma_{p+} := e^{-r\tau}(K - F_t^a)_+ - p_t^a > 0 \quad (2.6)$$

pour un gain d'arbitrage de  $\gamma_{p+}$  points d'indice.

## 2.3 Relation de parité put-call

Soit  $c_t$  et  $p_t$  deux options évaluées en  $t$ , de maturité  $\tau$  et de strike  $K$  sur le même future sous-jacent  $F_t$ . La relation de parité put-call est définie par

$$e^{-r\tau}(F_t - K) = c_t - p_t \quad (2.7)$$

La construction de portefeuilles d'arbitrage adéquats (Tab. 2.3 et Tab. 2.4) permet de traduire l'expression (2.7) en deux inégalités en tenant compte du bid-ask spread.

### Cas no.1

Dans tous les états de la nature, la valeur du portefeuille d'arbitrage (Tab. 2.3) est nulle en  $T$ . Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_1$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle, soit

$$\gamma_1 := c_t^a - p_t^b + e^{-r\tau}(K - F_t^b) \geq 0 \quad (2.8)$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat call	$c_t^a$	$F_T - K$	0	0
Vente put	$-p_t^b$	0	0	$F_T - K$
Vente future	0	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} K$	$K$	$K$	$K$
Total	$\gamma_1$	0	0	0

TAB. 2.3 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_1$

Le tableau 2.3 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver le premier cas de la parité put-call en tenant compte du spread de prix. Le payoff de ce portefeuille est nul ; la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle sous peine d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture à la date  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

Il y a violation de la parité put-call lorsque  $\gamma_1 < 0$  et gain d'arbitrage de  $|\gamma_1|$  points d'indice.

### Cas no.2

Dans tous les états de la nature, la valeur du portefeuille d'arbitrage (Tab. 2.4) est nulle en  $T$ . Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_2$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle, soit

$$\gamma_2 := p_t^a - c_t^b + e^{-r\tau}(F_t^a - K) \geq 0 \quad (2.9)$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Vente call	$-c_t^b$	$K - F_T$	0	0
Achat put	$p_t^a$	0	0	$K - F_T$
Achat future	0	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} K$	$-K$	$-K$	$-K$
Total	$\gamma_2$	0	0	0

TAB. 2.4 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_2$

Le tableau 2.4 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver le second cas de la parité put-call en tenant compte du spread de prix. Le payoff de ce portefeuille est nul ; la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle sous peine d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture à la date  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

Il y a violation de la parité put-call lorsque  $\gamma_2 < 0$  et gain d'arbitrage de  $|\gamma_2|$  points d'indice.

## 2.4 Résultats empiriques

Les tests des bornes inférieures de prix et de la relation de parité ont été appliqué aux cotations des options DAX observées sur la période du 1<sup>er</sup> au 26 octobre 2001. Pour éliminer au maximum le problème de synchronisation des données, deux sélections distinctes de futures sous-jacents ont été faites, selon les tests d'arbitrage effectués.

En ce qui concerne les tests des bornes inférieures (2.2 et 2.5), les futures intégrés dans les tests sont les cotations sélectionnées conformément à la méthodologie de la section 1.6. Il s'agit donc de la cotation du future DAX de maturité supérieure ou égale à l'option qui précède directement la cotation de l'option. Ce future est ensuite ajusté si sa maturité n'est pas la même que la maturité de l'option.

Dans le cas de la parité put-call, du fait de l'utilisation d'options calls et puts de mêmes caractéristiques, la méthodologie de test est différente. Chaque jour d'observation est fragmenté en créneaux horaires d'une durée de 5 minutes. Sur les 60 intervalles ainsi définis, on considère les derniers prix cotés des options calls et puts de mêmes caractéristiques. Le future sélectionné est cette fois le dernier prix coté à l'intérieur de l'intervalle. Tout comme pour le test des bornes inférieures, il doit être de maturité supérieure ou égale à l'option. Il est ensuite ajusté si sa maturité est différente de celle de l'option. Les tests de la relation de parité put-call (2.8 et 2.9) sont alors appliqués aux 16'348 observations de l'échantillon ainsi créé (Tab. 2.6).

### 2.4.1 Analyse globale

Les résultats sur les bornes inférieures mettent en évidence une violation globale de l'ordre de 0.075% des cotations. Sur la totalité des cotations de calls, les violations  $\gamma_{c+}$  s'élèvent à 0.011%. Les cotations des puts présentent un taux de violations  $\gamma_{p+}$  de 0.158%. Concernant les violations de la relation de parité, les pourcentages sont légèrement supérieurs. Sur la totalité des observations, les proportions d'opportunités d'arbitrage sont de l'ordre de 1.95%. La majorité des violations s'observe pour  $\gamma_2$ , avec des proportions de d'ordre de 1.43%, contre 0.52% pour  $\gamma_1$ .

	nb	%
taille échantillon	706'846	100
nb calls	399'547	56
nb puts	307'299	44
violations totales	532	0.075
violations $\gamma_{c+}$	44	0.011
violations $\gamma_{p+}$	488	0.158

TAB. 2.5 – Bornes inférieures

	nb	%
taille échantillon	16'348	100
violations totales	320	1.957
violations $\gamma_1$	85	0.520
violations $\gamma_2$	235	1.437

TAB. 2.6 – Relation de parité

Le tableau 2.5 présente l'échantillon du test des bornes inférieures de prix, ainsi que les résultats globaux relatifs aux violations  $\gamma_{c+}$  et  $\gamma_{p+}$ . La colonne nb indique le nombre absolu d'observations et de violations. La colonne % indique le pourcentage relativement au total. Les pourcentages  $\gamma_{c+}$  et  $\gamma_{p+}$  sont donnés relativement au nombre de calls et de puts.

Le tableau 2.6 présente l'échantillon du test de la relation de parité, ainsi que les résultats globaux relatifs aux violations  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . L'échantillon est créé sur la base de prix de clôture définis pour les 60 intervalles horaires de la journée de trading (intervalles de 5 minutes entre 10-12h et 14-17h). La colonne % indique le pourcentage de violations relativement à la taille de l'échantillon.

Ces premiers résultats mettent en évidence de très faibles proportions d'opportunités d'arbitrage liées aux bornes inférieures de prix et à la relation de parité put-call. Une typologie des violations observées ainsi qu'une analyse des gains potentiellement réalisables pourra donner une information plus précise quant à leur l'origine. Une analyse relative au moneyness et à l'échéance des options arbitrables est donc proposée.

### 2.4.2 Analyse échéance-moneyness

La typologie des violations va permettre de définir les zones de moneyness et d'échéance qui dégagent les plus forts taux d'opportunités d'arbitrage. Outre les pourcentages, elle donne également une indication des profits potentiels réalisables. L'analyse traite séparément les cas d'arbitrage sur la borne inférieure et les cas d'arbitrage sur la relation de parité put-call.

## Borne inférieure, violations $\gamma_{c+}$ et $\gamma_{p+}$

Les tableaux 2.7 et 2.8 décrivent les violations des bornes inférieures par intervalles de moneyness et d'échéances. La distribution des violations relativement au moneyness montre clairement que celles-ci apparaissent uniquement pour des options ITM ; on distingue clairement la distribution en diagonale dans le tableau. Les plus fortes proportions apparaissent pour des options puts dont le moneyness est supérieur à 1.15, donc clairement dans la monnaie. Cette zone met en évidence 453 violations, soit 3% des options cotées dans cet intervalle de moneyness. Les gains moyens réalisés sur l'ensemble des moneyness sont significativement positifs ; ils sont toutefois très faibles, de l'ordre de 1.5 points d'indice. Aucune tranche ne met en évidence une moyenne excédentaire. La borne des options calls est moins fréquemment violée. On remarque toutefois la présence de 39 violations groupées dans la zone de moneyness 0.9-0.95.

Au niveau de l'échéance, les violations apparaissent pour des options dont l'échéance est inférieure à 20 jours. La faible valeur spéculative des options de courte échéance est susceptible d'expliquer la présence d'opportunités d'arbitrage. La borne des options calls est violée en quasi totalité le jour même de l'échéance. Pour les options puts, 389 violations sont observées pour les échéances court terme, ce qui représente 2% des options puts cotées. Les gains par tranches d'échéances n'excèdent pas les 2.96 points d'indice ; les violations sur les options long terme dégagent des gains légèrement supérieurs, de l'ordre de 2.3 points en moyenne. On peut remarquer toutefois la présence d'une violation  $\gamma_{c+}$  dégagant un gain clairement supérieur, d'une valeur de 25.67 points d'indice. Il s'agit cependant d'un cas isolé.

$m_t$	violations $\gamma_{c+}$						violations $\gamma_{p+}$					
	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$
<0.80	2	0.06	4.31	2.15	0.11	28.06*	—	—	—	—	—	—
0.80–0.85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.85–0.90	1	0.01	1.26	1.26	—	—	—	—	—	—	—	—
0.90–0.95	39	0.10	65.85	1.69	4.03	2.61*	—	—	—	—	—	—
0.95–1.00	2	0.00	4.61	2.31	2.48	1.32	—	—	—	—	—	—
1.00–1.05	—	—	—	—	—	—	13	0.03	15.67	1.21	1.37	3.18*
1.05–1.10	—	—	—	—	—	—	16	0.10	28.18	1.76	1.39	5.06*
1.10–1.15	—	—	—	—	—	—	6	0.06	3.99	0.67	0.50	3.28*
1.15–1.20	—	—	—	—	—	—	88	1.18	132.90	1.51	1.07	13.20*
>1.20	—	—	—	—	—	—	365	1.80	557.78	1.53	1.49	19.65*
Total	44	0.01	76.04	1.73	3.81	3.00*	488	0.16	738.53	1.51	1.41	23.77*

TAB. 2.7 – Violations  $\gamma_{c+}$  et  $\gamma_{p+}$  sur les options DAX par intervalles de moneyness

Le tableau 2.7 présente les statistiques de violations des bornes inférieures de prix relativement au moneyness  $m_t = K/F_t$ . La mesure  $n$  indique le nombre absolu de violations observées. Le nombre relatif indiqué par le % est un pourcentage donné relativement au nombre total de cotations observées dans l'intervalle de moneyness considéré. La valeur 0.00 indique que le pourcentage est inférieure à 0.01%. La somme  $\Sigma$ , la moyenne  $\mu$  ainsi l'écart-type  $\sigma$  des gains d'arbitrage observés sont donnés en points d'indice. Un test d'hypothèse de la positivité de la moyenne est effectué ( $t_{\text{obs}} = \mu\sqrt{n}/\sigma$ ). Le signe \* indique que ce test est significatif à 5%.

$\tau$	violations $\gamma_{c+}$						violations $\gamma_{p+}$					
	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$
0	41	1.29	46.88	1.14	0.98	7.48*	21	0.49	32.49	1.55	1.27	5.57*
1–5	1	0.01	1.26	1.26	—	—	22	0.10	19.86	0.90	1.08	3.92*
6–10	1	0.00	25.67	25.67	—	—	202	1.01	236.06	1.17	1.21	13.78*
11–20	—	—	—	—	—	—	144	0.43	222.89	1.55	1.03	18.12*
21–50	—	—	—	—	—	—	6	0.01	9.67	1.61	1.76	2.24*
51–100	1	0.00	2.23	2.23	—	—	51	0.05	104.74	2.05	2.27	6.46*
101–200	—	—	—	—	—	—	2	0.01	5.93	2.96	3.53	1.19
>200	—	—	—	—	—	—	40	0.55	106.89	2.67	1.37	12.32*
Total	44	0.01	76.04	1.73	3.81	3.00*	488	0.16	738.53	1.51	1.41	23.77*

TAB. 2.8 – Violations  $\gamma_{c+}$  et  $\gamma_{p+}$  sur les options DAX par intervalles d'échéances

Le tableau 2.8 présente les statistiques de violations des bornes inférieures de prix relativement à l'échéance (jours) de l'option  $\tau$ . La mesure  $n$  indique le nombre absolu de violations observées. Le nombre relatif indiqué par le % est un pourcentage donné relativement au nombre total de cotations observées dans l'intervalle d'échéance considéré. La valeur 0.00 indique que le pourcentage est inférieure à 0.01%. La somme  $\Sigma$ , la moyenne  $\mu$  ainsi l'écart-type  $\sigma$  des gains d'arbitrage observés sont donnés en points d'indice. Un test d'hypothèse de la positivité de la moyenne est effectué ( $t_{\text{obs}} = \mu\sqrt{n}/\sigma$ ). Le signe \* indique que ce test est significatif à 5%.

## Relation de parité put-call, violations $\gamma_1$ et $\gamma_2$

Les tableaux 2.9 et 2.10 présentent les résultats des violations de la relation de parité put-call par intervalles de moneyness et d'échéances. Une première analyse du nombre absolu de violations relativement au moneyness montre que celles-ci se présentent pour des options proches de la monnaie. Mais en rapportant ce nombre absolu d'arbitrage au nombre d'observations contenues par tranches de moneyness, le résultat s'inverse et devient analogue au résultat sur les bornes inférieures. Là encore, il semble que les zones de moindre liquidité mettent en évidence de plus forts taux de violations. Les violations sont de l'ordre de 1.3% à 4.49% pour les observations dont le moneyness est inférieur à 0.9. Pour les moneyness plus élevés, ces proportions sont de 0.73% à 2.99% ; le nombre d'observations est toutefois moindre. Tout comme les violations de bornes inférieures, les gains moyens sont significatifs. Les profits potentiels sont légèrement supérieurs ; ils sont de l'ordre de 4.63 points pour  $\gamma_1$  et de 3.24 points pour  $\gamma_2$ . La distribution des gains relativement aux zones de moneyness ne fait pas apparaître de zone particulièrement plus intéressante. On remarque dans le cas de la violation  $\gamma_1$ , deux moyennes de gains nettement supérieures, pour les zones de moneyness 1.05-1.10 et inférieures à 0.8. Toutefois, le nombre de violations est extrêmement faible. Il s'agit de cas isolés.

L'analyse des violations relativement à l'échéance de l'option montre une dispersion plus importante que pour les violations des bornes inférieures. Il semble que les pourcentages de violations les plus importants apparaissent cette fois pour des échéances inférieures à 50 jours. Il n'apparaît pas de zone d'échéances dégagant un profit potentiel supérieur, tant sur  $\gamma_1$  que sur  $\gamma_2$ .



$m_t$	violations $\gamma_1$						violations $\gamma_2$					
	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$
$< 0.80$	3	3.75	32.41	10.80	7.61	2.46*	3	3.75	4.83	1.61	1.44	1.93
$0.80 - 0.85$	4	1.50	4.88	1.22	0.71	3.42*	12	4.49	37.20	3.10	2.12	5.07*
$0.85 - 0.90$	10	1.33	22.48	2.25	1.66	4.28*	10	1.33	37.50	3.75	5.82	2.04*
$0.90 - 0.95$	21	0.91	73.94	3.52	3.10	5.21*	31	1.35	151.61	4.89	7.10	3.83*
$0.95 - 1.00$	19	0.32	39.08	2.06	2.07	4.34*	80	1.36	181.35	2.27	3.34	6.08*
$1.00 - 1.05$	10	0.21	23.93	2.39	2.33	3.25*	52	1.08	124.45	2.39	2.98	5.78*
$1.05 - 1.10$	9	0.57	186.34	20.70	23.02	2.70*	30	1.90	174.97	5.83	4.71	6.78*
$1.10 - 1.15$	4	1.00	2.09	0.52	0.38	2.74*	12	2.99	45.05	3.75	5.16	2.52*
$1.15 - 1.20$	4	2.88	6.38	1.59	1.78	1.79	3	2.16	3.69	1.23	1.05	2.02
$> 1.20$	1	0.73	2.00	2.00	—	—	2	1.46	1.08	0.54	0.02	30.74*
Total	85	0.52	393.53	4.63	9.49	4.50*	235	1.43	761.72	3.24	4.43	11.23*

TAB. 2.9 – Violations  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur les options DAX par intervalles de moneyness

Le tableau 2.9 présente les statistiques de violations de la relation de parité relativement au moneyness  $m_t = K/F_t$  des options. La mesure  $n$  indique le nombre absolu de violations observées. Le nombre relatif indiqué par le % est un pourcentage donné relativement au nombre total de cotations observées dans l'intervalle de moneyness considéré. La valeur 0.00 indique que le pourcentage est inférieure à 0.01%. La somme  $\Sigma$ , la moyenne  $\mu$  ainsi l'écart-type  $\sigma$  des gains d'arbitrage observés sont donnés en points d'indice. Un test d'hypothèse de la positivité de la moyenne est effectué ( $t_{\text{obs}} = \mu\sqrt{n}/\sigma$ ). Le signe \* indique que ce test est significatif à 5%.

$\tau$	violations $\gamma_1$						violations $\gamma_2$					
	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$	$n$	%	$\Sigma$	$\mu$	$\sigma$	$t_{\text{obs}}$
0	1	0.82	0.69	0.69	—	—	4	3.28	27.82	6.96	2.41	5.78*
1–5	9	0.70	36.93	4.10	5.59	2.20	14	1.08	31.92	2.28	3.65	2.34*
6–10	5	0.40	12.96	2.59	1.61	3.61*	62	4.96	127.02	2.05	2.88	5.60*
11–20	7	0.30	18.31	2.62	2.30	3.00*	75	3.25	184.79	2.46	3.03	7.03*
21–50	25	0.72	218.24	8.73	16.21	2.69*	47	1.36	186.94	3.98	4.33	6.30*
51–100	28	0.48	92.64	3.31	3.39	5.17*	28	0.48	194.39	6.94	7.96	4.62*
101–200	7	0.41	8.54	1.22	1.20	2.70*	4	0.24	8.29	2.07	1.95	2.13*
$> 200$	3	0.80	5.22	1.74	1.78	1.69	1	0.27	0.56	0.56	—	—
Total	85	0.52	393.53	4.63	9.49	4.50*	235	1.43	761.72	3.24	4.43	11.23*

TAB. 2.10 – Violations  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur les options DAX par intervalles d'échéances

Le tableau 2.10 présente les statistiques de violations de la relation de parité relativement à l'échéance  $\tau$  (jours) des options call et put. La mesure  $n$  indique le nombre absolu de violations observées. Le nombre relatif indiqué par le % est un pourcentage donné relativement au nombre total de cotations observées dans l'intervalle d'échéance considéré. La valeur 0.00 indique que le pourcentage est inférieure à 0.01%. La somme  $\Sigma$ , la moyenne  $\mu$  ainsi l'écart-type  $\sigma$  des gains d'arbitrage observés sont donnés en points d'indice. Un test d'hypothèse de la positivité de la moyenne est effectué ( $t_{\text{obs}} = \mu\sqrt{n}/\sigma$ ). Le signe \* indique que ce test est significatif à 5%.

## 2.5 Robustesse

Les résultats d'arbitrage mettent en évidence une majorité de violations  $\gamma_{p+}$  et  $\gamma_2$ . Cette distribution de violations est expliquée en partie par la construction du future ajusté. En effet, l'actualisation a été faite sans tenir compte des dividendes versés en fin d'année. Le future ajusté

est par conséquent meilleur marché ; les bornes (2.5) et (2.9) auront donc tendance à être plus fréquemment violées relativement aux bornes (2.2) et (2.8). L'analyse des violations relativement à l'écart entre l'échéance des futures et des l'option confirme cette hypothèse. La totalité des violations lorsque le future est ajusté est de 0.261% pour les bornes inférieures de prix et de 3.59% pour la relation de parité put-call. Dans les cas où les maturités entre options et futures sont identiques, ces taux de violations sont de 0.026% pour les bornes inférieures de prix et de 0.912% pour la relation de parité. Pour palier à cette sous-évaluation du future ajusté, il aurait donc fallu considérer le future  $\hat{F}_t(\tau)$  défini par

$$\hat{F}_t(\tau) := e^{q(\tau_2 - \tau)} F_t(\tau)$$

où  $q$  est le taux de dividende instantané (donné annuellement) versé sur la période différentielle  $(\tau_2 - \tau)$ . Les erreurs d'évaluations peuvent également provenir du type d'échéance considéré. Les professionnels utilisent une échéance basée sur une année de trading et non calendaire comme c'est le cas ici. L'échéance est alors définie comme étant le nombre de jours d'activité boursière séparant la maturité de l'option à aujourd'hui, proportionnellement à une année de 252 jours. Pour ce qui est des taux d'intérêt employés dans les différents tests, ils constituent un bon proxy des taux utilisés par les opérateurs dans la mesure où les maturités considérées sont inférieures à une année. Les professionnels utilisent en effet des taux dépôts pour les échéances inférieures à 3 mois. Pour les échéances supérieures ils utilisent les euro-futures liquides et les taux swaps pour les échéances jusqu'à 10 ans.

D'autres facteurs, liés cette fois au fonctionnement même du marché, sont également susceptibles d'expliquer la présence de violations, à savoir

- les coûts de transactions et les commissions.
- les anticipations des dividendes.

Ces facteurs structurels permettent de comprendre pourquoi les professionnels, conscients des opportunités d'arbitrage, n'entrent pas dans les positions.

## 2.6 Conclusion

Les études empiriques d'opportunités d'arbitrage sur les marchés d'options, basées sur les relations de parité put-call ou encore sur la relation de box spread mettent en évidence des taux élevés de violations. Les tests entrepris par Taylor [42], Loundon [35] ou plus récemment par Ackert et Tian [2] déterminent notamment des taux de violations compris entre 20% et 30% pour la relation de parité. Sur le marché suisse, Chesney, Gibson et Loubergé [16] mettent également en évidence des taux de violations de l'ordre de 12% sur des données journalières et de 32% sur des données intra-journalières. La faible liquidité du marché explique en partie cette différence. La prise en compte des coûts de transactions diminue significativement ces pourcentages sans pour autant les éliminer.

Ces différentes études montrent que de nombreux facteurs sont susceptibles d'influencer les violations. Il s'agit notamment de la liquidité du marché et du degré de synchronisation des données. L'échantillon considéré dans cette étude permet d'écarter de tels biais. Les tests appliqués aux cotations sur des intervalles de 5 minutes montrent clairement que la relation de parité put-call est vérifiée en pratique. Les tests des bornes inférieures mettent en évidence des taux de violations encore plus faibles. De plus, les pourcentages observés apparaissent pour des zones de forts et faibles moneyness et ce pour de faibles échéances ; les mauvaises évaluations liées à ces caractéristiques ne sont pas surprenantes. Les gains potentiels des violations sont de l'ordre de 1.53 points d'indice pour la borne inférieure et de 3.61 points pour la relation de parité. Ceux-ci ne constituent pourtant pas des gains substantiels du fait de coûts structurels non négligeables. Il n'apparaît donc pas d'intérêt économique à mettre en place des stratégies basées sur les violations présentées.

## Chapitre 3

# Surfaces de volatilité

### 3.1 Introduction

Les anticipations de la volatilité future jouent un rôle central sur les marchés d'options ; il s'agit d'un paramètre clé pour l'ensemble des modèles d'évaluation.

Il est nécessaire d'estimer la volatilité car ce paramètre n'est pas observable directement sur le marché. Une première méthode considère les rendements de l'actif sur une période passée plus ou moins longue. On parle alors de volatilité historique. Cette méthode d'estimation suppose implicitement que la perception du risque par les investisseurs est uniquement liée à la variabilité des cours de l'actif dans le passé. C'est la principale critique qui peut lui être adressée. Une autre méthode d'estimation consiste à retirer de l'information des marchés d'options en inversant les prix pour déterminer une volatilité dite "implicite". Cette volatilité implicite permet de calibrer un modèle théorique de prix, tel que celui de Black et Scholes, aux prix observés sur le marché.

Dans l'univers de Black et Scholes, la volatilité implicite devrait être la même quelque soit le type, le prix d'exercice ou encore l'échéance de l'option. En pratique, toutefois, les volatilités implicites tendent à différer relativement au strike et à l'échéance de l'option. MacBeth et Merville [36] mettent en évidence ce phénomène sur le marché américain en étudiant une série d'options sur titres pour l'année 1976. D'autres chercheurs se sont penchés par la suite sur cette problématique. Rubinstein [39] examine notamment les options sur l'indice S&P500 sur la période 1986-1992. Taylor et Xu [43] entreprennent des tests similaires sur le marché des options sur devises du *Philadelphia Stock Exchange*. Le marché d'options du *London International Future Exchange* est également testé par Duque et Paxon [24]. Toutes ces études mettent en évidence la violation de l'hypothèse de volatilité constante du modèle de Black et Scholes. Le graphique des volatilités implicites relativement au strike décrit une courbe en forme de U appelée *smile*. Le crash boursier de 1987 provoqua une modification de ce smile sur les marchés d'options sur indices et sur actions. Celui-ci se transforma en *sneer*, défini par Webster [44] comme un sourire de coin ; la volatilité

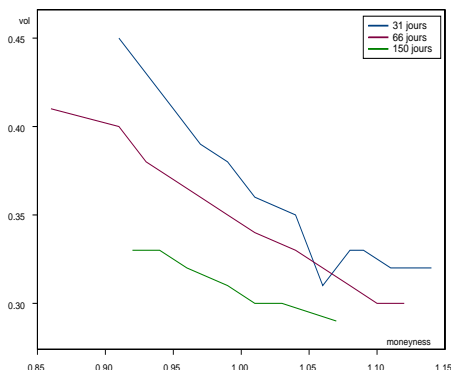


FIG. 3.1 – Smiles de volatilité

La figure 3.1 présente les volatilités implicites calculées le 16.10.2001 à 10h30. Elle met en évidence la dépendance entre moneyness,  $m_t = K/F_t$ , et volatilités implicites. La pente du smile s'estompe pour les maturités plus importantes.

implicite diminuant de manière monotone pour un prix d'exercice augmentant relativement au niveau du sous-jacent.<sup>1</sup> En parallèle à cette dépendance au strike, les études mettent en évidence une relation entre volatilité implicite et maturité de l'option ; l'intensité du smile s'estompant pour des maturités d'options plus importantes.

La question reste ouverte concernant la source des biais du modèle de Black et Scholes. De nombreuses hypothèses ont été faites pour expliquer le phénomène de smile. Il peut s'agir tout d'abord d'un écart de liquidité entre les prix d'exercices. Ainsi, certains opérateurs sont "collés en volatilité", et pour le besoin de la gestion de leurs positions, sont contraints d'augmenter la volatilité sur certains strikes. Toutefois, cette augmentation n'est que locale. Une autre source de biais concerne la violation de l'hypothèse de distribution lognormale des prix du sous-jacent et la violation de l'hypothèse de constance de la volatilité. Dans ce contexte, l'émergence d'un sneer de volatilité peut être expliquée par la prise en compte par les investisseurs de plus importants mouvements baissiers de l'indice sous-jacent. La queue gauche de distribution implicite des rentabilités observées est effectivement plus épaisse que dans le cas d'une distribution lognormale. Rubinstein met en évidence ce phénomène suite au crash boursier d'octobre 1987 ; celui-ci parle alors de *catastr-o-phobia*. Pour obtenir un prix consistant avec le modèle de Black et Scholes, il est donc nécessaire d'augmenter les volatilités pour les options dont le strike est faible relativement au sous-jacent. La violation de la constance de la volatilité a, quant à elle, été mise en évidence par une constatation empirique connue sous le nom de *Fisher Black effect*<sup>2</sup>. En 1976, Black [10] remarqua le comportement opposé du sous-jacent et de sa volatilité. Lorsque la valeur du sous-jacent augmente, sa volatilité semble baisser. Et lorsque celui-ci diminue, la volatilité augmente. Cette corrélation négative fût l'objet de nombreux résultats empiriques, découlant

<sup>1</sup>Hull [31, pages 43] utilise le terme de *skew* de volatilité.

<sup>2</sup>Connu également sous le nom de *leverage effect*.

d'analyses directes du sous-jacent ou des marchés d'options. Une dernière source de biais est liée cette fois aux imperfections du marché, tels que les coûts de transactions, les restrictions des ventes à découvert et les taxes. Les différentes études semblent donc établir que le smile est une conséquence directe du caractère aléatoire de la volatilité, des variations brusques du prix des actifs ainsi que des imperfections et de la liquidité du marché.

De nombreux chercheurs ont élaboré des modèles pouvant expliquer les prix de marché des options. En introduisant une prime de liquidité dans le modèle de Black et Scholes, Bellalah et Pringent [5] offrent des explications cohérentes avec les constatations précédentes. Les modèles à volatilité stochastiques de Heston [30] ou encore Hull et White [32], peuvent expliquer le smile et la persistance de la volatilité lorsque le prix et la volatilité sont négativement corrélés. D'autres modèles à volatilité stochastique ont également tenté d'expliquer le smile ; il s'agit notamment d'approches développées par Stein et Stein [41], et Wiggins [45]. Les modèles de types ARCH et GARCH représentent une alternative à la modélisation stochastique de la volatilité. Duan [21] utilise notamment un modèle GARCH(1,1) pour créer un modèle d'évaluation consistant avec les prix observés sur le marché. Pour modéliser le comportement du sous-jacent, Heston [30] introduit le processus gamma. Ce processus assimilable à un processus de Poisson permet de prendre en considération les variations brusques de la valeur de l'actif support. Les sauts du prix et les queues de distribution permettent d'évaluer l'effet de l'annonce d'informations non anticipées par le marché. Le processus gamma peut donc être utilisé pour expliquer le smile de volatilité. De manière similaire, le modèle à sauts de Bates [3] avec un saut moyen négatif génère également les profils observés empiriquement.

Toutefois, tenir compte des effets stochastiques de la volatilité n'est pas une chose aisée. L'évaluation d'options par le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage devient complexe. Une exception peut être faite du moins lorsque la volatilité est donnée comme une fonction déterministe du prix du sous-jacent et/ou du temps. Dans ce cas, les arguments d'arbitrage restent valables. De plus, les modèles à volatilité déterministe ne demandent pas de considérations particulières sur l'attitude des investisseurs face au risque et ne nécessitent pas l'utilisation d'autres instruments dérivés pour couvrir la volatilité et le risque de saut. Seuls les paramètres du modèle doivent être estimés. Le concept de volatilité déterministe est étudié par Derman et Kani [19], Dupire [23] et Rubinstein [38]. Dumas, Fleming et Whaley [22] testent empiriquement une telle hypothèse sur le marché des options sur l'indice S&P500. Ils utilisent différents modèles de surfaces qu'ils calibrent chaque semaine au marché. Les résultats montrent une forte variation dans le temps des paramètres estimés, impliquant notamment la mauvaise qualité prévisionnelle d'une telle méthodologie. La supériorité relative du modèle de Black et Scholes à volatilité constante par rapport aux modèles à volatilité déterministe est l'un des résultats surprenants de leur étude.

L'analyse proposée ici s'inscrit dans les travaux entrepris par Dumas, Fleming et Whaley. Quatre modèles déterministes de volatilités sont appliqués aux options DAX sur la période du 1<sup>er</sup> au 26 octobre 2001. La qualité explicative et prévisionnelle est déterminée sur des intervalles horaires de 30 minutes. Les résultats mettent alors en évidence l'intérêt de telles surfaces par rapport à la simple hypothèse de volatilité constante.

La suite du chapitre est organisée de la manière suivante : La section 3.2 présente le modèle d'évaluation d'options sur futures développé par Black. La section 3.3 définit la notion de volatilité implicite. Elle présente également la méthode de Newton-Raphson pour la recherche de zéros de fonctions non-linéaires. Elle propose ensuite deux méthodes de sélection de volatilités implicites. La constitution de l'échantillon d'observations est détaillée à la section 3.4. Les différents modèles de surfaces paramétriques sont présentés à la section 3.5. La section 3.6 donne les résultats des estimations *in-the-sample* et *out-of-the-sample*. Elle propose également une étude de l'évolution des paramètres dans le temps. La conclusion donnée à la section 3.7 reprend les différents résultats pour mettre en évidence l'intérêt d'une telle méthodologie.

## 3.2 Modèle de Black

Le modèle de Black [9] est une extension du modèle d'évaluation d'options de Black et Scholes. En utilisant des hypothèses similaires à celles utilisées pour dériver la formule originale de Black et Scholes, soient

- Le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique de variance  $\sigma^2$  constante.
- Les ventes à découvert sont autorisées sans restriction.
- Il n'y a aucun coûts de transactions.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.
- Le taux sans risque est constant.
- Les options sont de type européen.

Black présente un modèle pour évaluer les options sur matières premières, futures et contrats *forward*. On remarque que le processus de diffusion n'a pas de *drift*. En effet, celui-ci est déjà contenu dans le prix du future. Pour dériver une formule analytique d'évaluation, Black utilise le même raisonnement d'arbitrage que dans la formule de Black et Scholes. Il crée un portefeuille de couverture composé d'une position dans l'option et dans le future. Le rendement de ce portefeuille doit être alors équivalent au taux sans risque en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Les prix en  $t$  des options call,  $c_t(\tau, K)$  et put,  $p_t(\tau, K)$ , d'échéance  $\tau$  et de strike  $K$  sur le sous-jacent  $F_t$  sont alors donnés par

$$\begin{aligned}
 c_t(\tau, K) &:= e^{-r\tau} (F_t N(d_1) - K N(d_2)) \\
 p_t(\tau, K) &:= e^{-r\tau} (K N(-d_2) - F_t N(-d_1)) \\
 d_1 &:= \frac{-\ln(K/F_t) + 0.5 \sigma^2 \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \\
 d_2 &:= d_1 - \sigma \sqrt{\tau}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $\sigma$  est la volatilité instantanée de la rentabilité du sous-jacent et  $N(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi normale standardisée. On remarque que la formule (3.1) ne nécessite pas les mêmes maturités pour le future et l'option. Lorsque l'échéance de l'option sur future est la même que l'échéance du future, cette option est théoriquement équivalente à une option sur le sous-jacent.

Par contre, si les maturités de l'option et du future ne sont pas les mêmes, il y a alors biais d'évaluation. Ainsi, par exemple, une option call sur future, d'échéance inférieure au future, aura une valeur supérieure à l'option sur l'actif sous-jacent si le marché est normal.<sup>3</sup>

Les cotations d'options considérées dans cette étude sont des prix d'options sur indice et non sur futures d'indice. Leur échéance doit donc être la même pour ne pas introduire de biais de sur- ou sous-évaluation. Le future introduit dans la formule d'évaluation sera donc le même future sélectionné et ajusté introduit à la section 1.6.

### 3.3 Volatilité implicite

Le seul paramètre du modèle de Black qui ne peut pas être directement observé est  $\sigma$ , la volatilité des rendements instantanés du sous-jacent. Il peut être estimé statistiquement sur la base des rendements historiques du sous-jacent. Une méthode alternative est de considérer la volatilité dite "implicite". Cette volatilité implicite notée  $\sigma^{bk}$  est la volatilité qui, introduite comme paramètre dans la formule de Black, égalise le prix théorique de l'option à celui du marché ; formellement, dans le cas d'une option call, celle-ci est donnée par

$$\exists ! \sigma^{bk} \text{ tel que } c_t := c_t(F_t^m, K, r, \tau, \sigma^{bk}) = c_t^m(\tau, K)$$

où  $F_t^m$  et  $c_t^m$  sont les prix du marché en  $t$  du future et du call définis par le milieu de la fourchette de prix. Cette volatilité dérivée des prix actuels du marché peut être utilisée pour décrire les anticipations des opérateurs sur la volatilité future du sous-jacent.

La formule d'évaluation de Black n'étant pas linéaire, il n'existe pas de formule explicite pour déterminer  $\sigma^{bk}$ . Il faut donc inverser la formule numériquement pour trouver ce paramètre. La méthode de Newton-Raphson permet une telle détermination.

#### 3.3.1 Algorithme de Newton-Raphson

Une possibilité pour résoudre une équation non-linéaire du type  $f(x) = 0$ , avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continûment dérivable au voisinage de  $x$ , est d'utiliser la méthode de Newton-Raphson. Partant d'une valeur initiale  $x_0 \in \mathbb{R}$  habilement choisie, cet algorithme produit les estimations successives  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$  en utilisant le processus itératif suivant :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f_x(x_i)} \quad (i \geq 0) \tag{3.3}$$

où  $f_x$  est la dérivée de la fonction  $f$  par rapport à  $x$ . Si  $f$  est deux fois continûment dérivable au voisinage de  $x_0$ , alors la méthode de Newton-Raphson converge quadratiquement si  $x_1$  est

---

<sup>3</sup>Hull [31, page 295] définit un marché normal comme un marché où les prix des futures sont supérieurs aux prix au comptant. Le marché est dit inversé dans le cas contraire.



suffisamment proche de  $x_0$ . Cette méthode permet donc d'obtenir une solution par itérations ; si le point de départ est bien choisi du moins. Si la dérivée ne possède pas de forme analytique, celle-ci peut être calculée numériquement.<sup>4</sup>

Dans le cadre de la recherche d'une volatilité implicite  $\sigma^{bk}$  de la formule (3.1), l'algorithme (3.3) est appliqué aux fonctions suivantes, selon qu'il s'agisse d'options calls ou puts

$$\begin{aligned} \text{calls : } f(\sigma) &:= c_t(\sigma) - c_t^m \\ \text{puts : } f(\sigma) &:= p_t(\sigma) - p_t^m \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la dérivée de  $f$  par rapport à la volatilité  $\sigma$ , notée  $f_\sigma$ , est la même. Ceci découle de la relation de parité (2.7). La sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité est connue sous le nom de *véga*. Le véga d'une option d'échéance  $\tau$ , de strike  $K$ , sur le future  $F_t$  est donné par

$$f_\sigma = e^{-r\tau} F_t \sqrt{\tau} N'(d_1)$$

où  $r$  et  $d_1$  sont les paramètres communs à la formule (3.1) et  $N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$ . Une condition nécessaire à l'existence d'une solution à l'équation  $f(\sigma) = 0$  est que les prix  $c_t^m$  et  $p_t^m$  satisfassent les conditions des non-arbitrages (2.1) et (2.4).<sup>5</sup> Pour assurer la convergence du processus itératif de Newton-Raphson sur les cotations d'options, le point de départ  $\sigma_0$  a été fixé à 40%. Ce choix a permis la convergence de la méthode pour toutes les options après 8 itérations. Manaster et Koehler [37] proposent une formule pour la valeur initiale de l'algorithme de Newton-Raphson. Une formulation dérivée pour les options sur futures peut être donnée par

$$\sigma_0 = \left( \left| \ln \frac{F_t}{K} \right| \frac{2}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas, on remarque que pour des options parfaitement à la monnaie, la volatilité estimée est nulle. Les valeurs initiales ne garantissent pas une convergence pour les options qui sont très éloignées de la monnaie. Des méthodes d'estimation de volatilités implicite pour les options proches de la monnaie sont proposées par Bharadia, Christofides et Salkin [8], par Brenner et Subrahmanyam [12] ainsi que par Chance [15].

### 3.3.2 Sélection de volatilités

La méthode de Newton-Raphson a permis d'inverser les prix du marché et de déterminer les volatilités implicites des options. Par la relation de parité put-call (2.7), les volatilités implicites

<sup>4</sup>Méthode des différences finies [7].

<sup>5</sup>Pour une option call, on a  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} c_t(\sigma) = e^{-r\tau} (F_t - K)_+ \Rightarrow \lim_{\sigma \rightarrow 0} f(\sigma) = e^{-r\tau} (F_t - K)_+ - c_t^m =: a$  et  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} c_t(\sigma) = e^{-r\tau} F_t \Rightarrow \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(\sigma) = e^{-r\tau} F_t - c_t^m =: b$ . Comme la fonction  $f(\sigma)$  est continue, si  $a \leq 0$  et  $b \geq 0$  (i.e (2.1)), alors par le théorème de Bolzano, il existe  $\sigma^{bk}$  tel que  $f(\sigma^{bk}) = 0$ . Un raisonnement analogue dans le cas d'une option put permet de dériver la condition d'existence d'une volatilité implicite (i.e. (2.4)).

des calls et des puts de même échéance et de même maturité sont les mêmes.<sup>6</sup> Toutefois, sur le marché, en raison du spread de cotation, du niveau de liquidité, et des anticipations des opérateurs, ces paramètres sont rarement égaux. Sur la base de ces constatations, il est essentiel de créer un proxy de volatilité implicite.

## Sélection binaire put-call

Le chapitre 1 a montré que les options les plus liquides sont en dehors de la monnaie. Cette liquidité va impliquer une meilleure évaluation des prix et par conséquent une meilleure représentativité de la volatilité anticipée par les investisseurs. La sélection binaire put-call tient compte de ce raisonnement pour ne garder que la volatilité des options activement traitées. Soit  $\sigma_c$  la volatilité implicite d'une option call et  $\sigma_p$  la volatilité implicite d'une option put, le proxy de la volatilité implicite est alors défini par

$$\sigma := \begin{cases} \sigma_c & \text{pour } m > 1 \\ \sigma_p & \text{pour } m \leq 1 \end{cases}$$

L'avantage de cette méthode est sa simplicité. Toutefois, elle ne tient pas compte de toute l'information disponible sur le marché puisqu'elle ne considère que les calls pour  $m > 1$  et que les puts pour  $m \leq 1$ .

## Pondération par le delta

Une alternative à la méthode de sélection put-call consiste à pondérer les volatilités implicites des calls et des puts de même strike et de même échéance par leur *delta* respectif ; le delta d'une option étant sa sensibilité au mouvement du sous-jacent. Le delta d'options call et put, d'échéance  $\tau$ , de strike  $K$ , dérivé du modèle de Black est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_c &:= \frac{\partial c}{\partial F} = e^{-r\tau} N(d_1) \\ \Delta_p &:= \frac{\partial p}{\partial F} = \Delta_c - e^{-r\tau} \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Soit une option call  $c_t(\sigma_c)$  et une option put  $p_t(\sigma_p)$  évaluées par le modèle de Black avec des volatilités  $\sigma_c$  pour le call et  $\sigma_p$  pour le put. La relation de parité (2.7) peut s'écrire comme

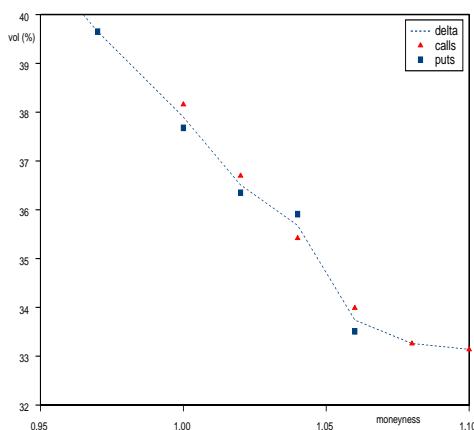
$$\begin{aligned} c_t(\sigma_c) &= p_t(\sigma_p) + e^{-r\tau}(F - K) \\ &= e^{-r\tau}[KN(-d_2(\sigma_p)) - FN(-d_1(\sigma_p)) + F - K] \\ &= e^{-r\tau}[K(1 - N(d_2(\sigma_p))) - F(1 - N(d_1(\sigma_p))) + F - K] \\ &= e^{-r\tau}[FN(d_1(\sigma_p)) - KN(d_2(\sigma_p))] \\ &= c_t(\sigma_p) \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si  $\sigma_c = \sigma_p$  car la fonction  $c_t(\sigma)$  est bijective.

où  $r$ ,  $d_1$  et  $N(\cdot)$  sont conformes à l'équation (3.1). Si l'on dispose à un instant donné de la volatilité implicite d'une option call et d'une option put de mêmes caractéristiques, le proxy de volatilité est alors défini par

$$\sigma := \sigma_c(1 - e^{-r\tau} \Delta_c) + \sigma_p(1 + e^{-r\tau} \Delta_p)$$

Dans le cas contraire, la sélection est faite selon la méthode binaire put-call. Les options fortement dans la monnaie ont un delta proche de  $e^{-r\tau}$  pour les calls et proche de  $-e^{-r\tau}$  pour les puts. Cette méthode donne donc un poids moins important aux options dans la monnaie, moins liquides.<sup>7</sup> Contrairement à la sélection binaire plus radicale, ce procédé a l'avantage de tenir compte de toute l'information disponible sur le marché. Ce proxy de volatilité sera retenu par la suite et constituera la base du fitting des modèles de surfaces.



$m_t$	$\sigma_c$	$\sigma_p$	$\sigma_{bin}$	$\sigma_\Delta$
0.93	—	43.61	43.61	43.61
0.95	—	41.05	41.05	41.05
0.97	—	39.65	39.65	39.65
1.00	38.16	37.68	38.16	37.90
1.02	36.70	36.35	36.70	36.51
1.04	35.42	35.91	35.42	35.68
1.06	33.99	33.51	33.99	33.74
1.08	33.26	—	33.26	33.26
1.10	33.14	—	33.14	33.14

FIG. 3.2 – Sélections binaire et delta

La figure 3.2 présente les sélections binaire et delta de volatilités au 16.10.2001 pour les prix de clôture entre 10h-10h30 des options proches de la monnaie d'échéance 31 jours. Le tableau donne les volatilités implicites des calls  $\sigma_c$  et des puts  $\sigma_p$  pour les différents moneyness,  $m_t = K/F_t$ , observés. La sélection binaire  $\sigma_{bin}$  ainsi que la sélection delta  $\sigma_\Delta$  sont déterminés conformément aux méthodologies de la section 3.3.2.

### 3.4 Constitution de l'échantillon

L'échantillon est constitué sur la base des cotations des options sur l'indice DAX enregistrées sur le marché Eurex<sup>®</sup> entre le lundi 1<sup>er</sup> et le vendredi 26 octobre 2001. La plage d'observation journalière débute à 10h pour finir à 12h et reprend de 14h à 17h CET. Le prix de marché des options est défini par le milieu de fourchette de prix, soit  $c_t^m$  pour une option call et  $p_t^m$  pour une option put. Pour chaque cotation d'option, un future est sélectionné. Cette sélection est basée

<sup>7</sup>Voir l'analyse d'activité faite à la section 1.6.

sur la méthodologie expliquée à la section 1.6 en vue de définir un sous-jacent tenant compte d'une synchronisation maximale entre les données. Le prix du future est également défini par le milieu de la fourchette de prix, soit  $F_t^m$ . Pour éliminer les biais de sous- ou sur-évaluation, le future est ajusté pour se ramener à une évaluation d'option sur indice. Trois critères d'exclusion sont ensuite appliqués aux données :

- Les options dont l'échéance est inférieure à 15 jours et supérieure à 180 jours calendaires sont éliminées de l'échantillon. Les options de très courte échéance possèdent en effet une faible valeur spéculative ; leur évaluation peut être de ce fait erronée. Les options long terme sont quant à elles très peu liquides ; elles contiennent peu d'information sur la volatilité future attendue.
- Les options dont le moneyness est très faible ou très grand ( $m < 0.8$  ou  $m > 1.2$ ) sont également éliminées de l'échantillon. Les options fortement dans la monnaie, tout comme les options court terme, possèdent une valeur spéculative très faible. Les options fortement en dehors de la monnaie sont très peu traitées ; l'information implicite est peu représentative des anticipations des investisseurs.
- Les options ne satisfaisant pas les conditions de non-arbitrage (2.1) et (2.4) sont également éliminées. Il n'est en effet pas possible de calculer une volatilité implicite, l'équation  $f(\sigma) = 0$  ne possédant pas de solution.

Les volatilités implicites des options sont ensuite calculées à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson pour cet échantillon "nettoyé". La matrice des volatilités ainsi constituée est alors fragmentée par jours et par créneaux horaires de 30 minutes. Les volatilités de "clôture" sont déterminées pour chaque fragment, selon les différents type d'option (call-put), les échéances et les strikes observés. La sélection delta achève la constitution de cette double liste (jour,heure) de matrices des volatilités. La taille de l'échantillon est alors de 10'738 observations.

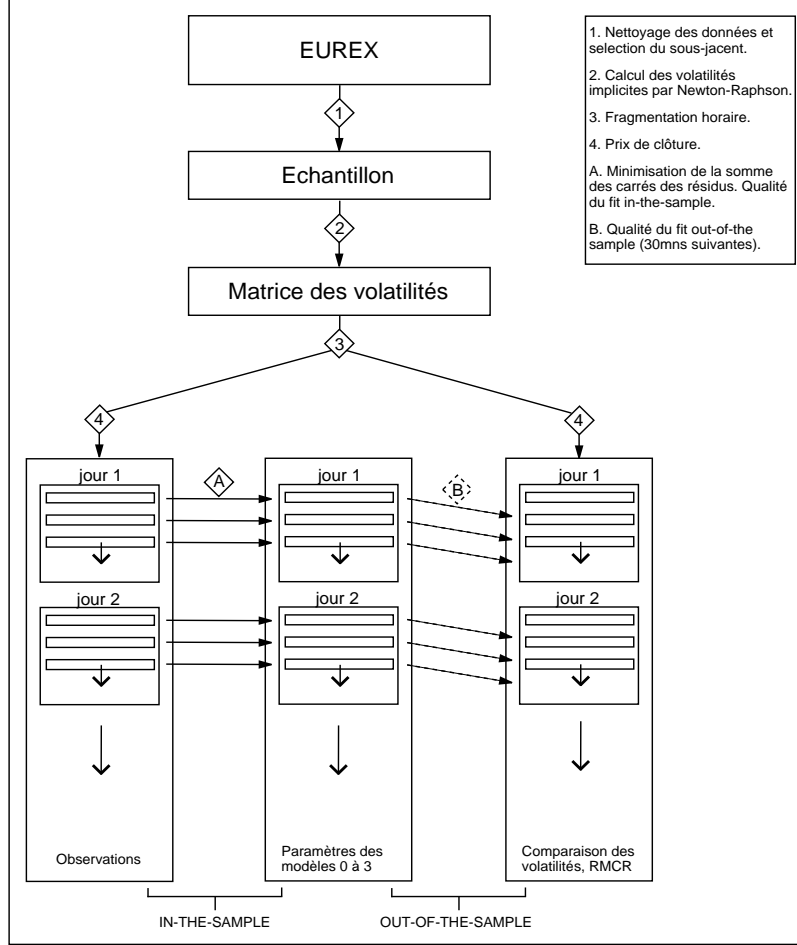


FIG. 3.3 – Constitution de l'échantillon

### 3.5 Modèles de surfaces

Quatres modèles paramétriques de surfaces sont étudiés. Le premier modèle  $M_0$  est une surface plane, horizontale, constante pour tout moneyness et toute échéance. Celle-ci correspond à l'hypothèse de volatilité constante du modèle de Black. Les modèles  $M_1$  à  $M_3$  considèrent par contre une structure par terme et un smile de volatilité. La structure par terme est similaire dans les trois modèles. Elle découle de constatations empiriques qui décrivent cette structure comme une fonction du type  $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ . D'autres structures par terme du type *Nelson-Siegel* ont été également testées. Ces fonctions sont couramment employées pour modéliser la courbe des taux d'intérêt.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Voir à ce propos Filipovic [26, 27] et Sack [40].

Toutefois, le nombre et la variabilité des paramètres estimés n'ont pas semblé apporter une qualité supplémentaire au modèle empirique proposé ici. La structure par terme de la volatilité étant identique dans les modèles  $M_1$  à  $M_3$ , la différence apparaît donc au niveau du smile de volatilité. Trois fonctions ont été choisies pour reproduire la forme du smile caractéristique du marché des options sur indices. La surface  $M_1$  modélise le smile par le logarithme naturel du moneyness. La surface  $M_2$  utilise un paramètre supplémentaire pour approximer le smile par le moneyness mis à une puissance réelle. La surface  $M_3$  est une connexion des deux modèles précédents en  $m=1$  avec condition de lissage de premier ordre.

$$\begin{aligned}
M_0 : \quad \sigma_{M_0}(\tau, m) &:= a_0 \\
M_1 : \quad \sigma_{M_1}(\tau, m) &:= b_0 + b_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) + b_2 \ln(m) \\
M_2 : \quad \sigma_{M_2}(\tau, m) &:= c_0 + c_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) + c_2 m^{c_3} \\
M_3 : \quad \sigma_{M_3}(\tau, m) &:= \begin{cases} \sigma_{M_1}(\tau, m) & \text{si } m < 1 \\ \sigma_{M_2}(\tau, m) & \text{si } m \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le cas du modèle  $M_3$ , on connecte les modèles  $M_1$  et  $M_2$  en  $m=1$ . Les dérivées premières doivent également correspondre sur cette ligne de connexion rendant ainsi la surface lisse. Ces conditions s'énoncent formellement par

$$\begin{aligned}
\sigma_{M_1}(\tau, 1) &\equiv \sigma_{M_2}(\tau, 1) \\
\frac{\partial \sigma_{M_1}}{\partial m}(\tau, 1) &\equiv \frac{\partial \sigma_{M_2}}{\partial m}(\tau, 1)
\end{aligned}$$

Celles-ci sont satisfaites lorsque  $b_1 = c_1$ ,  $b_0 = (c_0 + c_2)$  et  $c_3 = (b_2/c_2)$ . Le modèle  $M_3$  est alors donné par

$$M_3 : \quad \sigma_{M_3}(\tau, m) := \begin{cases} \sigma_{M_1}(\tau, m) & \text{si } m < 1 \\ (b_0 - c_2) + b_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) + c_2 m^{(b_2/c_2)} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

Ces restrictions sur les paramètres définissent le modèle  $M_3$  comme un modèle à 4 paramètres,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et  $c_2$ .

Les paramètres des modèles sont déterminés par minimisation de la somme des carrés des erreurs entre les volatilités implicites et les volatilités données par les différents modèles. La méthode d'estimation est une méthode de descente, en l'occurrence la méthode du gradient conjugué.<sup>9</sup> Pour assurer une convergence numérique de la méthode de descente dans le cas du modèle par morceau  $M_3$ , une indicatrice de type logit a été définie. Celle-ci présente l'avantage, pour  $n$  suffisamment

---

<sup>9</sup>Fonction *leastsq* de SCILAB<sup>®</sup> avec option 'gc'.

grand, à la fois de correspondre à une indicatrice sur  $m = 1$ , mais également d'être dérivable. Formellement, celle-ci est définie par

$$\chi(m) := \frac{e^{n(m-1)}}{1 + e^{n(m-1)}}$$

Le paramètre  $n$  est fixé à  $3 \cdot 10^3$  pour éviter un débordement de capacité du logiciel et ce notamment pour des moneyness supérieurs à 1.1.<sup>10</sup>

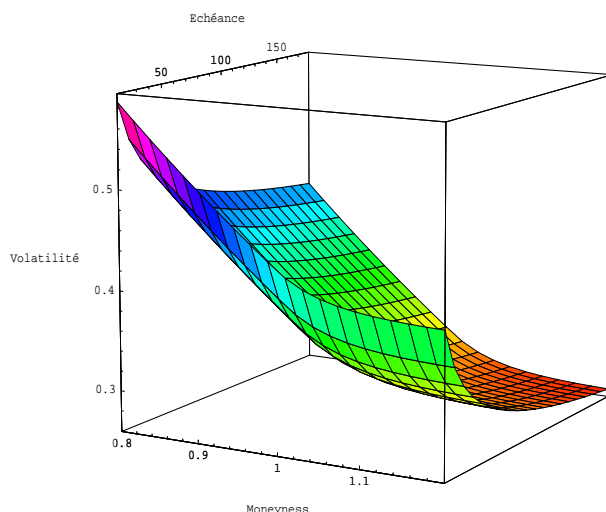


FIG. 3.4 – Surface de volatilité  $M_3$

La figure 3.4 présente la surface de volatilité du modèle  $M_3$ . Les paramètres sont déterminés par calibration sur la base des volatilités implicites de clôture calculées le 16.10.2001 à 10h30. Les paramètres estimés sont :  $b_0 = 0.2483$ ,  $b_1 = 0.0387$ ,  $b_2 = -0.6593$ ,  $c_2 = 0.038$ .

## 3.6 Résultats des estimations

### 3.6.1 Qualité du fitting

Pour juger de la qualité des différents modèles, les mesures RMCR, FREQ et FREQ UP sont définies :

- La mesure RMCR donne une indication sur la qualité de calibration du modèle. Elle est définie par la racine carrée de la moyenne des résidus au carré. Soit  $N$  le nombre total d'observations,  $\sigma_i^{bk}$  la  $i^{\text{ème}}$  observation de volatilité implicite et  $\sigma_i$  la  $i^{\text{ème}}$  estimation de cette volatilité par le

<sup>10</sup>Des tests numériques ont été effectués garantissant la robustesse de cette indicatrice.

modèle, cette mesure est alors donnée par

$$\text{RMCR} := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^{bk} - \sigma_i)^2}$$

- La mesure FREQ donne une indication sur la fréquence de qualité du modèle. Elle indique le pourcentage de fois que le modèle a fourni la meilleure estimation de volatilité, définie par la valeur absolue des résidus, sur l'ensemble des observations. Ainsi, si la mesure FREQ indique x%, cela signifie que sur l'ensemble des estimations réalisées, le modèle en question a déterminé dans x% des cas la meilleure estimation de volatilité.
- La mesure FREQ UP donne une indication sur la tendance du modèle à sur- ou sous-évaluer les volatilités. Elle indique le pourcentage de fois que le modèle a sur-estimé une volatilité par rapport à la valeur observée sur le marché. Ainsi, si la mesure FREQ UP indique x%, cela signifie que sur les volatilités déterminées par le modèles, x% sont supérieures aux volatilités implicites observées sur le marché.

### 3.6.2 Résultats in-the-sample

Le tableau 3.1 présente les résultats des mesures RMCR, FREQ et FREQ UP in-the-sample calculées à partir des volatilités de clôture sur 30 minutes. Il apparaît très clairement que le modèle  $M_0$  est le moins performant avec une mesure RMCR à 0.0728 et une fréquence de performance de 13.91%. Il semble donc que les volatilités implicites du marché violent l'hypothèse de volatilité constante du modèle de Black. La figure 3.6.2 a) met en évidence les erreurs d'évaluation relativement au moneyness du modèle  $M_0$  pour l'ensemble de l'échantillon. Elle indique que le modèle  $M_0$  sous-évalue les volatilités pour  $m < 1$  et sur-évalue les volatilités pour  $m > 1$ . Les volatilités du marché décrivent donc une structure décroissante par rapport au moneyness ; le smile de volatilité est implicitement visible. Les estimations des modèles tenant compte de la variation du strike, du sous-jacent et de l'échéance sont de meilleure qualité. La mesure RMCR diminue de 50% avec les modèles  $M_1$  et  $M_2$ . Les fréquences de qualité s'améliorent légèrement. Avec une qualité d'estimation RMCR supérieure de 54%, le modèle 3 est le meilleur in-the-sample. Dans 51.75% des cas, il permet une estimation plus précise des volatilités. La figure 3.6.2 b) met en évidence les erreurs d'évaluations relativement au moneyness du modèle  $M_3$ . On remarque cette fois une meilleure distribution des erreurs. La mesure FREQ UP diminue à 52.09%. Ce modèle n'a donc pas tendance à sur-évaluer les volatilités. Il est à remarquer toutefois que le modèle  $M_3$  possède un paramètre supplémentaire au modèle  $M_1$ . Une étude attentive de l'évolution des paramètres et de la qualité prévisionnelle permettra de déterminer s'il s'agit d'*overfitting*.



	In-the-sample			Out-of-the-sample		
	RMCR	FREQ	FREQ UP	RMCR	FREQ	FREQ UP
$M_0$	0.0728	13.91	60.10	0.0738	14.57	59.87
$M_1$	0.0363	15.16	59.27	0.0387	15.24	59.85
$M_2$	0.0363	19.17	59.28	0.0387	19.38	59.88
$M_3$	0.0336	51.75	52.09	0.0364	50.81	53.54

TAB. 3.1 – Qualité des fitting in-the-sample et out-of-the-sample

Le tableau 3.1 présente les résultats des mesures RMCR, FREQ et FREQ UP in-the-sample et out-of-the-sample. La mesure RMCR est la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs entre les valeurs des modèles et les valeurs observées. La mesure FREQ indique le pourcentage de fois que le modèle a donné une meilleure estimation que les autres modèles. La mesure FREQ UP indique le pourcentage de fois que le modèle sur-évalue la volatilité par rapport à celle observée sur le marché.

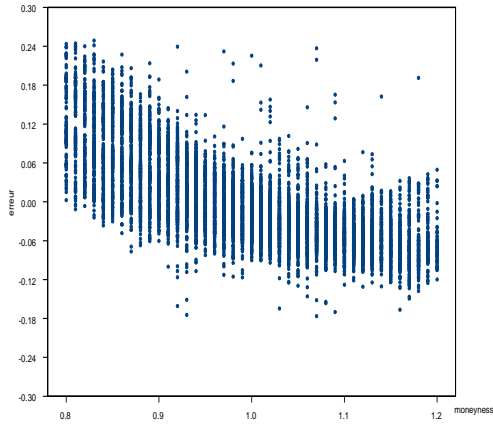


Fig. 3.6.2 a) Erreurs d'évaluation ITS, modèle  $M_0$

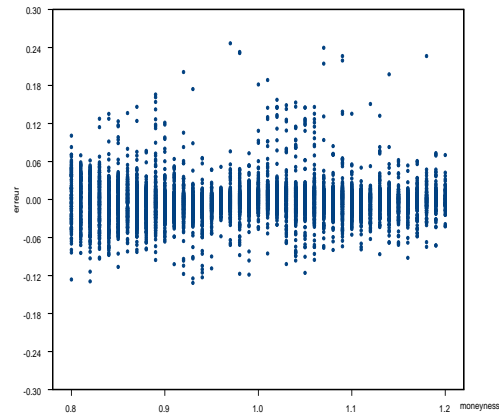


Fig. 3.6.2 b) Erreurs d'évaluation ITS, modèle  $M_3$

La figure 3.6.2 a) présente les erreurs  $(\sigma_i^{bk} - \sigma_i)$  d'évaluation in-the-sample du modèle  $M_0$  par rapport au moneyness. La figure 3.6.2 b) présente les erreurs pour le modèle  $M_3$ .

### 3.6.3 Evolution des paramètres

Les statistiques des paramètres estimés pour chaque surface de volatilité apportent également des informations. Les moyennes, les écart-types ainsi que les corrélations des différents paramètres sont présentés dans le tableau 3.2.

Lorsque le modèle  $M_0$  est calqué chaque demi-heure sur le marché, durant la période d'observation, l'estimation moyenne du coefficient  $a_0$  est de 0.36, soit une volatilité moyenne de 36%. Le minimum est atteint le 11 octobre entre 14h et 14h30 avec une volatilité à 32% ; le maximum apparaît le 3 octobre à l'ouverture du marché américain avec une volatilité à 40%. Avec un écart-

type de 0.0187 points, soit 5% de la moyenne, ce modèle est, parmi les 4 modèles présentés, le plus stable dans le temps.

Les estimations des paramètres de la structure par terme des modèles  $M_1$  à  $M_3$  sont similaires. La volatilité long terme à la monnaie est donnée par  $b_0$  dans les modèles  $M_1$  et  $M_3$  et par  $(c_0+c_2)$  dans le modèle  $M_2$ . La valeur moyenne est de 25.65% pour les modèles  $M_1$  et  $M_2$ . Dans le cas du modèle  $M_3$ , la volatilité long terme ATM moyenne est de 24.14%. On remarque que dans le cas du modèle  $M_2$ , les paramètres  $c_0$  et  $c_2$  ont une corrélation négative parfaite ; le modèle est clairement surparamétré. On remarque en effet que la valeur moyenne du paramètre  $c_3$  est de 0.0275, ce qui implique un  $m^{c_3}$  proche de 1. Les paramètres  $c_0$  et  $c_2$  peuvent ainsi être exprimés par un unique paramètre.

Les paramètres de volatilité long terme ATM et de la structure par terme des modèles  $M_1$  et  $M_2$  présentent de fortes corrélations. On note -0.8582 entre  $b_0$  et  $b_1$  du modèle  $M_1$  et -0.8005 entre ces mêmes paramètres mais pour le modèle  $M_3$ . Ces corrélations élevées indiquent donc une dépendance entre la structure par terme et la volatilité long terme pour les options à la monnaie. Ceci vient du fait que la volatilité long terme prend son sens lorsque  $\tau$  est suffisamment grand. L'échéance la plus élevée de l'échantillon est de 180 jours. Le paramètre de la structure par terme n'est donc pas annulé à long terme ce qui peut expliquer la corrélation observée.

De manière à examiner plus précisément l'évolution des paramètres dans le temps, la figure 3.6.3 met en évidence 2 graphiques présentant les évolutions des paramètres des modèles  $M_1$  et  $M_3$ . La figure 3.6.3 b) montre une variabilité plus marquée du paramètre  $b_2$  par rapport au modèle  $M_1$ . Elle montre également 2 explosions du paramètre  $c_2$  ; les valeurs atteintes sont de 99.69 et 33.10. Une étude attentive montre qu'il ne s'agit pas d'une mauvaise convergence de la méthode d'estimation utilisée (minimum local). Cette explosion vient du fait que le nombre d'observations de volatilités dont le moneyness est supérieur à 1 est faible. De plus, il suffit que sur le peu d'observations, une structure plate soit observée, du fait d'observations extrêmes de volatilités, pour que le modèle force la valeur  $c_2$  rendant ainsi le smile "plat". Ces cas peuvent être écartés en testant le nombre d'observations dans cette zone de moneyness, en éliminant les valeurs extrêmes, ou encore en augmentant la taille de la fenêtre d'observation pour avoir un maximum de données dans toutes les zones de moneyness. Une contrainte sur la valeur des paramètres serait également susceptible d'éliminer de telles variations. En retirant les deux explosions majeures, la moyenne du paramètre  $c_2$  passe à 0.0462 et l'écart-type diminue pour atteindre 0.0438, soit 94% de la moyenne.

		estimations					
		$\mu$	$\sigma$				
$M_0$	$a_0$	0.3646	0.0187				
		$\mu$	$\sigma$	corrélations			
		$\mu$	$\sigma$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
$M_1$	$b_0$	0.2565	0.0233	1	-0.8582	-0.4900	
	$b_1$	0.0390	0.0114		1	0.3667	
	$b_2$	-0.4916	0.0747			1	
		$\mu$	$\sigma$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$M_2$	$c_0$	22.9922	7.7737	1	-0.0929	-0.9999	-0.3297
	$c_1$	0.0390	0.0114		1	0.0904	0.1234
	$c_2$	-22.7357	7.7699			1	0.3296
	$c_3$	0.0275	0.0532				1
		$\mu$	$\sigma$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$c_2$
$M_3$	$b_0$	0.2415	0.0238	1	-0.8005	-0.1357	-0.0496
	$b_1$	0.0390	0.0115		1	0.2921	0.1038
	$b_2$	-0.6555	0.1388			1	-0.1530
	$c_2$	0.7098	7.4128				1

TAB. 3.2 – Coefficients estimés pour les différents modèles

Le tableau 3.2 présente les estimations des différents paramètres des modèles de surfaces. La moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$  des paramètres sont calculés sur l'ensemble des observations, soit sur les 200 fits effectués. L'écart-type est donné en points. Les corrélations des paramètres sont donnés pour les modèles  $M_1$  à  $M_3$ .

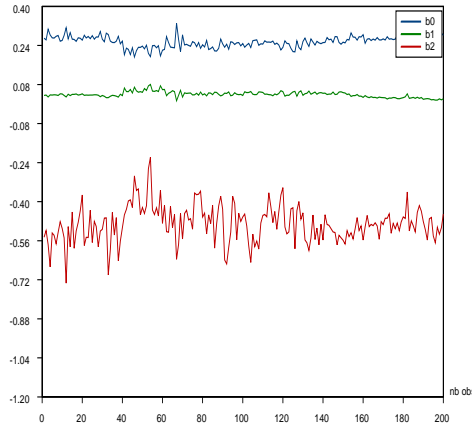


Fig. 3.6.3 a) Evolution des paramètres, modèle  $M_1$

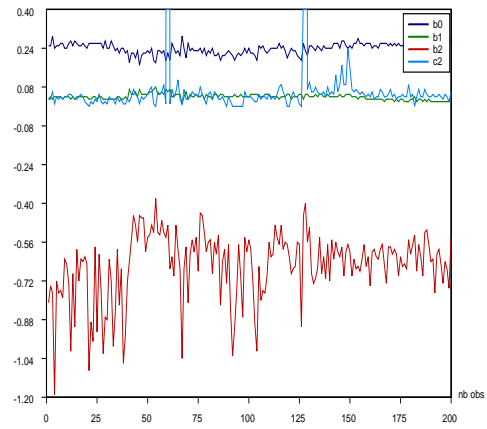


Fig. 3.6.3 b) Evolution des paramètres, modèle  $M_3$

La figure 3.6.3 a) présente l'évolution des 3 paramètres du modèle  $M_1$  sur les 200 fits effectués. La figure 3.6.3 b) présente l'évolutions des 4 paramètres du modèle  $M_3$ .

### 3.6.4 Résultats out-of-the-sample

Les résultats des estimations donnés dans la section 3.6.2 ont montré que la surface de volatilité doit tenir compte du moneyness et de l'échéance de l'option pour coller au marché. Le modèle  $M_3$ , plus complexe, a donné les meilleurs résultats en ce sens. Toutefois, ses paramètres varient plus dans le temps ; il faut donc se déplacer dans l'échantillon pour déterminer son pouvoir prédictif.

La méthodologie employée consiste à utiliser les paramètres estimés avec les données de clôture d'une demi-heure pour estimer les volatilités de clôture de la demi-heure suivante. Les créneaux horaires 10h-10h30 et 14h-14h30 sont éliminés de l'échantillon. L'information arrivant quasi instantanément sur le marché, il n'est en effet pas consistant dans cette analyse haute fréquence d'estimer les volatilité observées entre 10h-10h30 avec les estimations de la veille ou encore les volatilités de 14h-14h30 avec les estimations du créneau horaire 11h30-12h. Les mesures de RMCR, FREQ et FREQ UP sont calculées sur les 8'627 observations ainsi définies afin de déterminer la qualité prévisionnelle des 4 modèles présentés.

Le tableau 3.1 présente les résultats des mesures RMCR, FREQ et FREQ UP out-of-the-sample. En sortant de l'échantillon, on remarque que les mesures RMCR des quatre modèles augmentent. Sur l'ensemble des mesures de qualité, le modèle  $M_0$  est encore une fois le moins performant. Le modèle  $M_1$  améliore de 47.5% la mesure RMCR par rapport au modèle  $M_0$ . Avec une mesure RMCR à 0.0364 et une mesure FREQ à 50.81%, c'est clairement le modèle  $M_3$  qui donne les meilleures prévisions de volatilités. La mesure FREQ UP à 53.54% du modèle  $M_3$  indique que les volatilités estimées n'ont pas de tendance majeure à être sous- ou sur-évaluées.

Les différents tests effectués montrent que le modèle  $M_3$  est le meilleur in-the-sample mais également out-of-the-sample. L'analyse suivante précise les résultats de prévision pour les mesures RMCR et FREQ UP relativement à l'échéance et au moneyness. La figure 3.6.4 a) présente les résultats de la mesure RMCR. On remarque clairement que les erreurs d'évaluations les plus importantes se produisent pour les échéances inférieures à 40 jours, pour des zones de moneyness supérieures à 1.1 et inférieures à 0.9. Les meilleurs résultats de prévision sont donnés pour les options proches de la monnaie et ceci pour des échéances comprises entre 80 et 120 jours. De mauvaises évaluations sur l'ensemble des échéances sont observées pour les zones de moneyness inférieures à 0.85.

Au niveau des pourcentages de sur-évaluation de volatilités (Fig. 3.6.4), le modèle  $M_3$  semble se comporter correctement pour les options proches de la monnaie pour des échéances comprises entre 40 et 180 jours. Pour les options de très courtes échéances, il sur-évalue dans 60% des cas les volatilités pour  $m > 1$  et sous-évalue dans 70% des cas les volatilités implicites des options de moneyness  $m < 0.85$ . Le graphique met en évidence une forte sous-évaluation pour les moneyness supérieurs à 1 et une très forte sur-évaluation pour les moneyness inférieurs à 0.9 pour les options dont l'échéance est comprise entre 120 et 180 jours. Malgré les bonnes estimations en terme de RMCR, il semble que la pente du smile du modèle  $M_3$  pour cette zone d'échéances ne soit pas assez prononcée.

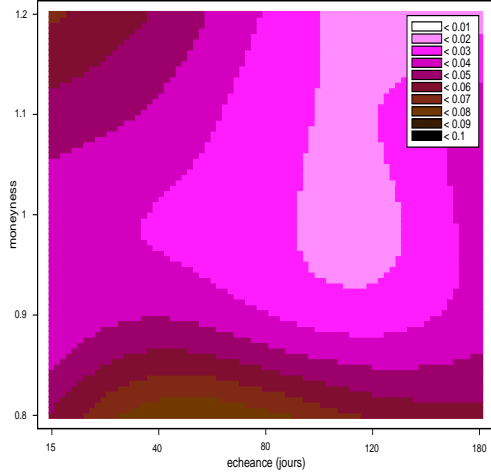


Fig. 3.6.4 a) RMCR, modèle  $M_3$

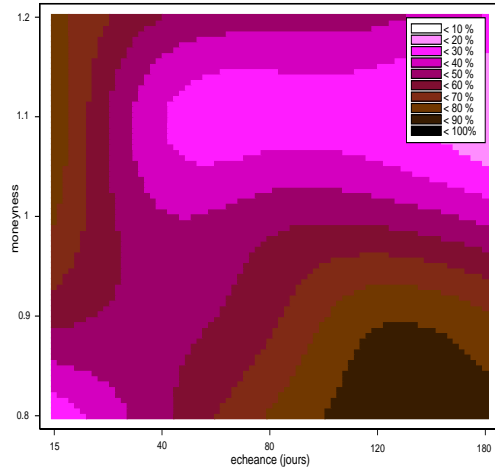


Fig. 3.6.4 b) FREQ UP, modèle  $M_3$

La figure 3.6.4 a) présente la mesure RMCR du modèle  $M_3$  relativement à l'échéance et au moneyness  $m_t = K/F_t$ . La figure 3.6.4 b) présente la mesure FREQ UP relativement à l'échéance et au moneyness. Les deux graphiques sont obtenus par interpolation bivariable sur les mesures effectuées.

### 3.7 Conclusion

Les résultats des mesures RMCR, FREQ et FREQ UP montrent clairement que les meilleurs modèles de surfaces de volatilité doivent tenir compte de l'échéance et du moneyness de l'option. L'hypothèse de volatilité constante, modélisée par la surface  $M_0$  donne les moins bons résultats in- et out-of-the-sample. Le modèle  $M_3$ , plus complexe, met en évidence de meilleures performances en terme de calibration et de prévision. Il améliore d'environ 50% la qualité de prévision par rapport à l'hypothèse de volatilité constante.

Ainsi, les résultats mis en évidence dans cette étude ne vont pas dans le sens des conclusions apportées par Dumas, Fleming et Whaley [22]. Ceux-ci testent l'hypothèse de volatilité déterministe développée par Rubinstein [39], Derman et Kani [19] et Dupire [23]. En calquant cinq modèles paramétriques sur les données hebdomadaires du marché des options sur l'indice S&P500, ils mettent en évidence une forte variabilité des paramètres estimés ainsi qu'une qualité prévisionnelle très faible pour les modèles de surfaces les plus complexes, tenant compte du strike et de l'échéance de l'option. La supériorité relative du modèle à volatilité constante par rapport aux modèles à volatilité déterministe est l'un des résultats surprenant de leur étude.

Il semble donc que l'application de modèles de surfaces sur des volatilités implicites intra-journalières apporte un intérêt en terme de prévision. Le pouvoir prédictif découlant de l'utilisation de données haute fréquence est également mis en évidence par Andersen, Bollerslev et Lange [1]. Ceux-ci montrent que dans le cadre d'un modèle GARCH(1,1), les données horaires

constituent la meilleure base de prévision de volatilité, comparativement aux données journalières, hebdomadaires ou mensuelles.

Une extension aux modèles proposés dans cette étude consisterait à joindre les modèles déterministes aux modèles stochastiques par une surface dont le smile évoluerait de manière aléatoire. Il semble en effet que ce paramètre varie de manière marquée sur l'ensemble des modèles testés. Les modèles de type GARCH ayant mis en évidence de bonnes qualités prédictives dans un cadre haute fréquence seraient susceptibles de modéliser un tel phénomène. Une étude comparative entre les modèles de surfaces et les modèles de type GARCH appliqués aux mêmes données haute fréquence constituerait également une analyse intéressante.

# Bibliographie

- [1] Torben G. ANDERSEN, Tim BOLLERSLEV, and Steve LANGE. Forecasting financial market volatility : sample frequency vis-à-vis forecast horizon. *Journal of Empirical Finance*, 6 :457–477, 1999.
- [2] Lucy F. ARKET and Yisoung S. TIAN. Evidence on the efficiency of index options markets. *Economic Review*, pages 40–52, 2000.
- [3] David BATES. Jumps and stochastic volatility : exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *Review in Financial Studies*, 9 :69–107, 1996.
- [4] Mondher BELLALAH, Eric BRIYS, Huu MAI, and François de VARENNE. *Options, Futures and Exotic Derivatives*. Wiley Frontiers in Finance, 1998.
- [5] Mondher BELLALAH and J.L PRINGENT. The pricing of options and with liquidity premiums. *Thema, University of Cergy*, 1995.
- [6] Mondher BELLALAH and Yves SIMON. *Options, Contrats à termes et Gestion des risques*. Economica, 2000.
- [7] Olivier BESSON. Cours d'analyse numérique I et II, 1998 et 2000. Université de Neuchâtel.
- [8] M.A.J. BHARADIA, N. CHRISTOFIDES, and G.R. SALKIN. Computing the Black-Scholes implied volatility. *Advances in Futures and Options Research*, 8 :15–29, 1995.
- [9] Fisher BLACK. The pricing of commodity contract. *Journal of Financial Economics*, 3 :167–179, 1976.
- [10] Fisher BLACK. Studies of stock price volatility changes ; proceedings of the 1976 meetings of the American Statistical Association. *Business and Economic Statistics Section*, pages 177–181, 1976.
- [11] Fisher BLACK and Myron SCHOLES. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.
- [12] M. BRENNER and M.G. SUBRAHMANYAM. A simple formula to compute the implied standard deviation. *Financial Analysts Journal*, 37 :80–83, 1988.
- [13] R.L. BROWN and S.A EASTON. Empirical evidence on put-call parity in Australian : a reconciliation and further evidence. *Australian Journal of Management*, 17 :11–20, 1992.
- [14] Don M. CHANCE. Parity tests of index options. *Advances in Futures and Options Research*, 2 :47–64, 1987.
- [15] Don M. CHANCE. Leap into the unknown. *Risk Publications/ Over the Rainbow*, 37 :251–256, 2001.
- [16] Marc CHESNEY, Rajna GIBSON, and Henri LOUBERGÉ. Arbitrage trading and index option pricing at SOF-FEX : an empirical study using daily and intradaily data. *Finanzmarkt und Portofolio Management*, 9 :35–59, 1995.
- [17] Rama CONT and José da FONSECA. Deformation of implied volatility surfaces : an empirical analysis. *Working paper*, 2001.
- [18] John C. COX, Stephen A. ROSS, and Mark RUBINSTEIN. Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.
- [19] Emanuel DERMAN and Iraj KANI. Riding on the smile. *Risk*, 7 :32–39, 1994.
- [20] Emanuel DERMAN and Iraj KANI. The volatility smile and its implied tree. *Quantitative Strategies Research Notes*, 1994.

- [21] J. DUAN. The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance*, 5 :13–32, 1995.
- [22] Bernard DUMAS, Robert E. WHALEY, and Jeff FLEMING. Implied volatility functions : empirical tests. *Journal of Finance*, 44 :2059–2106, 1998.
- [23] Bruno DUPIRE. Pricing and hedging with smiles. *Working paper, Paribas Capital Market*, 1993.
- [24] Joao DUQUE and Dean PAXON. Implied volatility and dynamic hedging. *Review of Futures Markets*, 13 :381–421, 1993.
- [25] Jeremy EVENINE and Andrew RUDD. Index options : the early evidence. *Journal of Finance*, 40 :743–756, 1985.
- [26] Damir FILIPOVIC. Exponential-polynomial families and the term structure of interest rates, 1998. ETH Zürich.
- [27] Damir FILIPOVIC. A note on the Nelson-Siegel family, 2000. ETH Zürich.
- [28] Sebastien GARNIER. Pricing equity options with a smile. Master's thesis, Université Paris Dauphine, 2000.
- [29] René HERREN and Bernhard SCHMID. Testing of different autoregressive conditional heteroscedastic models for pricing option on the Dax. Master's thesis, H.E.C. Lausanne, 1999.
- [30] Steven L. HESTON. A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6 :327–343, 1993.
- [31] John C. HULL. *Options, Futures and others Derivatives*. Prentice Hall International, 2000. Fourth edition.
- [32] John C. HULL and Alan L. WHITE. The pricing of options on assets with stochastic volatility. *Journal of Finance*, 42 :281–300, 1987.
- [33] J.C. JACKWERTH and M. RUBINSTEIN. Recovering probability distributions from option prices. *Journal of Finance*, 51 :1611–1631, 1996.
- [34] Abraham KAMARA and Thomas W. MILLER. Daily and intraday tests of european put-call parity. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30 :519–539, 1995.
- [35] G.F. LOUDON. Put-call parity : evidence from the big Australian. *Australian Journal of Management*, 13 :53–67, 1988.
- [36] J.D. MACBETH and L.J. MERVILLE. An empirical examination of the Black-Scholes model and its alternatives. *Journal of Finance*, 34 :1173–1186, 1979.
- [37] S. MANASTER and G. KOEHLER. The calculation of implied variances from the Black-Scholes model : a note. *Journal of Finance*, 37 :227–230, 1982.
- [38] Mark RUBINSTEIN. Non parametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from august 23, 1976 through august 31, 1978. *Journal of Finance*, 40 :455–480, 1985.
- [39] Mark RUBINSTEIN. Impied binomial trees. *Journal of Finance*, 49 :771–818, 1994.
- [40] Brian SACK. Using Treasury STRIPS to mesure the yield curve, 2000. Division of Monetary Affairs, Federal Reserve Board of Governors.
- [41] E.M. STEIN and J.C. STEIN. Stock price distribution with stochastic volatility : an analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4 :113–135, 1991.
- [42] S.L. TAYLOR. Put-call parity : evidence form the Australian options market. *Australian Journal of Management*, 15 :203–216, 1990.
- [43] Stephen J. TAYLOR and Xinzhong XU. The magnitude of implied volatility smiles : theory and empirical evidence for exchange rates. *Review of Futures Markets*, 15 :355–380, 1993.
- [44] WEBSTER. *New Riverside University Dictionary*. Houghton Mifflin Compagny, Boston, MA, 1994.
- [45] J. WIGGINS. Options values under stochastic volatility : theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, 19 :351–372, 1987.



# Annexe A

## Bornes supérieures de prix d'options

### Borne supérieure du prix d'une option call

Le payoff du portefeuille (Tab. A.1) est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_c^b$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage implique

$$\begin{aligned} \gamma_c^b &:= -c_t^b + e^{-r\tau} F_t^a \geq 0 \\ c_t^b &\leq e^{-r\tau} F_t^a \end{aligned} \tag{A.1}$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Vente call	$-c_t^b$	$K - F_T$	0	0
Achat future	0	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$	$F_t^a$
Total	$\gamma_c^b$	$K > 0$	$K > 0$	$F_T \geq 0$

TAB. A.1 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_c^b$

Le tableau A.1 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne supérieure de prix d'une options call. Le payoff est positif ou nul ; la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture au jour  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

L'expression (A.1) définit la borne supérieure du prix d'une option call.

## Borne supérieure du prix d'une option put

Le payoff du portefeuille défini dans (Tab. A.2) est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en  $t$ ,  $\gamma_p^b$ , en l'absence d'opportunité d'arbitrage implique

$$\begin{aligned}\gamma_p^b &:= -p_t^b + e^{-r\tau} F_t K \geq 0 \\ p_t^b &\leq e^{-r\tau} K\end{aligned}\tag{A.2}$$

	$t$	Payoff en $T$		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Vente put	$-p_t^b$	0	0	$F_T - K$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} K$	$K$	$K$	$K$
Total	$\gamma_p^b$	$K > 0$	$K > 0$	$F_T \geq 0$

TAB. A.2 – Construction du portefeuille d'arbitrage  $\gamma_p^b$

Le tableau A.2 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne supérieure de prix d'une options put. Le payoff est positif ou nul ; la valeur du portefeuille en  $t$  se doit d'être positive ou nulle en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Le prix  $F_T$  est un prix de clôture au jour  $T$  d'échéance de l'option ; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

L'expression (A.2) définit la borne supérieure du prix d'une option put.